

Courbes de Bézier à points massiques et à masses complexes pour la modélisation de lettres cursives.

Lionel Garnier¹ et Jean-Paul Bécar²

lgarnier@u-bourgogne.fr (Lionel Garnier)

jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr (Jean-Paul Bécar)

¹ Laboratoire Informatique de Bourgogne, Université de Bourgogne, 21000 Dijon

² Université de Valenciennes, LAMAV-CGAO, UMR CNRS 2956, 59313 Valenciennes

Résumé

Cet article présente les nombres complexes massiques qui sont les complexes usuels auxquels nous ajoutons un poids complexe ω . Si ce dernier est nul, nous obtenons des vecteurs, sinon, nous obtenons un point muni du poids ω . Ces nombres complexes massiques sont ensuite des points de contrôle de courbes de Bézier rationnelles quadratiques dont nous étudions la cinématique. En utilisant le vecteur nul comme nombre complexe massique de contrôle, nous pouvons construire des segments et des arcs de cercles à extrémités stationnaires qui servent à la construction des lettres cursives a , c , d et q .

Mots-clés : Courbe de Bézier, nombres complexes massiques, poids complexes, vecteur nul de contrôle, algorithme de De Casteljau, points stationnaires et de rebroussements, changement de paramètre homographique, écriture manuscrite.

1. Introduction

Les courbes de Bézier sont les courbes à points de contrôle le plus intuitif et ont été inventées par Pierre Bézier [Béz86] chez Renault et Paul de Faget de Casteljau [Cas85] chez Citroën. Dans un premier temps, ces courbes étaient le lieu barycentrique de points pondérés dont les points étaient les polynômes de Bernstein idoines : le nombre de points est le degré de ces polynômes plus 1. Ce modèle, de degré 2 à trois points de contrôle P_0 , P_1 et P_2 permet de représenter l'arc de parabole d'extrémités P_0 et P_2 et ayant pour tangentes les droites (P_0P_1) en P_0 et (P_2P_1) en P_2 . Ce modèle présente deux inconvénients : le même point P_1 dirige les tangentes en P_0 et P_2 ; il n'est pas possible d'obtenir des arcs d'ellipses ou d'hyperboles. Pour remédier à ce problème, il suffit d'augmenter le degré et de prendre une courbe de degré 3 à quatre points de contrôle P_0 , P_1 , P_2 et P_3 ce qui permet de représenter des arcs de courbes cubique d'extrémités P_0 et P_3 et ayant pour tangentes les droites (P_0P_1) en P_0 et (P_3P_2) en P_2 . Concernant le second problème, il suffit de remplacer les points P_0 , P_1 et

P_2 par des points pondérés $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ ce qui permet d'obtenir des arcs d'ellipses ou d'hyperboles en tant que lieu de barycentres [Far92, Far99, PT89]. Se pose alors le problème de l'existence de ces barycentres lorsque la somme des poids s'annule [Gou83, Lad02, Lad03] puisque dans ce cas, le barycentre n'existe plus et le résultat donne un vecteur. La solution qui généralise la notion de barycentre consiste à utiliser des points massiques [FJ89, FJ92]. En utilisant ce concept, à l'aide de changement de paramètre homographique, il est possible de déterminer les propriétés des coniques propres [Béc97, GB16, BG14] ce qui est impossible en utilisant le concept de géométrie projective [PT95]. De plus, cette modélisation étant indépendante de la structure métrique ou pseudo-métrique, il est possible de l'utiliser dans l'espace de Minkowski-Lorentz [LSD*14, DLG13, GB17b, GBD*19, GBD*20] pour représenter des surfaces canal [GBD17, GBMF15]. Il est possible aussi, via ce modèle, de construire des cyclides de Dupin en tant que surfaces de subdivisions [GDB*21b, GDB*21a].

Si nous nous intéressons à la cinématique de la courbe i.e. contrôler les vecteurs vitesse aux extrémités, nous devons utiliser un changement de paramètre quadratique qui fait doubler le degré de la courbe [GFB22]. L'utilisation de poids complexes permet de modéliser des arcs de cercles à points extrémaux stationnaires. Il est alors pertinent de remplacer les points du plan affine ou les vecteurs du plan vectoriel par leur affixe dans le plan complexe mais lorsque

nous avons un nombre complexe, nous devons savoir si son image est un point ou un vecteur. En effet, considérons l'arc de cercle modélisé par la courbe de Bézier γ_M de points massiques de contrôle $M_0(-1)$ de poids 1, $M_1(\imath)$ de poids $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $M_2(1)$ de poids 1. Considérons le demi-cercle modélisé par la courbe de Bézier γ_N de points massiques de contrôle $N_0(-1)$ de poids 1, $\vec{N}_1(\imath)$ et $N_2(1)$ de poids 1. Considérons la translation $\mathcal{T}_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}(-\frac{3}{2}\imath)$. Les points massiques de contrôle de $\mathcal{T}_{\vec{u}}(\gamma_M)$ sont $\mathcal{T}_{\vec{u}}(M_0)(-1 - \frac{3}{2}\imath)$ de poids 1, $\mathcal{T}_{\vec{u}}(M_1)(-\frac{1}{2}\imath)$ de poids $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\mathcal{T}_{\vec{u}}(M_2)(1 - \frac{3}{2}\imath)$ de poids 1. Les points massiques de contrôle de $\mathcal{T}_{\vec{u}}(\gamma_N)$ sont $\mathcal{T}_{\vec{u}}(N_0)(-1 - \frac{3}{2}\imath)$ de poids 1, $\mathcal{T}_{\vec{u}}(\vec{N}_1)(\imath)$ et $\mathcal{T}_{\vec{u}}(N_2)(1 - \frac{3}{2}\imath)$ de poids 1, figure 1.

Les affixes de M_1 et \vec{N}_1 sont les mêmes mais les affixes de $\mathcal{T}_{\vec{u}}(M_1)$ et de $\mathcal{T}_{\vec{u}}(\vec{N}_1)$ diffèrent car $\mathcal{T}_{\vec{u}}(\vec{N}_1) = \vec{N}_1$. L'exemple de la translation est le plus criant, mais ce résultat est le même pour toute transformation affine. Une solution est d'utiliser les transformations massiques [GB17a]. En ne travaillant que sur les nombres complexes, il faut savoir si un complexe donné est l'afixe d'un point du plan affine euclidien ou un vecteur du plan vectoriel euclidien. Pour ce faire, nous utilisons les complexes massiques qui permettent de manipuler les vecteurs, de masse nulle, et les points pondérés, de poids non nuls, du plan affine euclidien.

Afin de rester avec des courbes quadratiques, nous n'utilisons pas les parties réelle et imaginaire qui sont de degré 4 mais nous adaptons l'algorithme de De Casteljau en utilisant un changement de paramètre homographique afin de remplacer une courbe de Bézier sous forme standard par deux courbes de Bézier sous forme standard. La figure 2 fournit une représentation visuelle de la différence entre les deux algorithmes pour construire une courbe de Bézier quadratique rationnelle représentant un arc de cercle : l'algorithme projectif De Casteljau, Figure 2a, ne produit pas une distribution régulière des points construits, contrairement à notre algorithme De Casteljau généralisé, figure 2b. Dans la Figure 2a, les angles sont donnés dans le tableau 1. Dans la figure 2b, l'angle entre deux points construits consécutifs et le centre O du cercle est :

$$\widehat{P_0OB_0} = \widehat{B_iOB_{i+1}} = \widehat{B_6OP_2} = 33,75 = \frac{270}{8}$$

où $i \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$.

De plus, soit γ la courbe de Bézier quadratique rationnelle en forme standard avec les points de contrôle $(P_0, 1)$, $(P_1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(P_2, 1)$ représentant les trois quarts de cercle dans la Figure 2a. Alors $B_3 = \gamma(\frac{1}{2})$. Soit γ_1 l'une des deux sous-courbes de γ , en forme standard, avec les points finaux $(P_0, 1)$ et $(B_3, 1)$. Remarquez que les tangentes à la courbe de Bézier en P_0 et B_3 sont connues grâce à l'algorithme De Casteljau. Contrairement aux courbes polynomiales, dans le

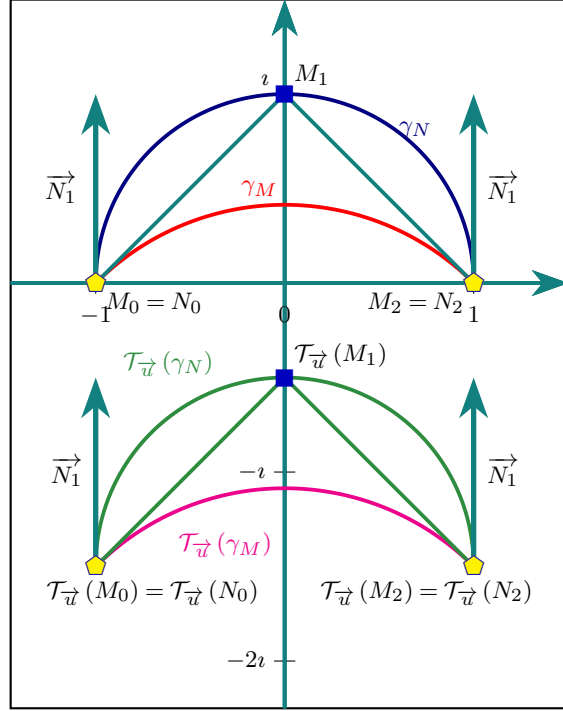


FIGURE 1 – Points massiques de contrôle de courbes de Bézier et transformation affine.

cas rationnel, il est nécessaire d'effectuer une construction itérative car

$$\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) \neq \gamma\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

L'article est composé comme suivant. Le second paragraphe définit l'ensemble des nombres complexes massiques. Le troisième paragraphe présente les courbes de Bézier à poids complexes et l'algorithme de De Casteljau. Dans le quatrième paragraphe, nous présentons la modélisation d'arc de cercle par des courbes de Bézier rationnelles linéaires et dans le paragraphe suivant, nous présentons la modélisation d'arc de cercle par des courbes de Bézier rationnelles quadratiques à points extrémaux stationnaires. Avant de conclure et de donner des perspectives, nous construisons des lettres cursives.

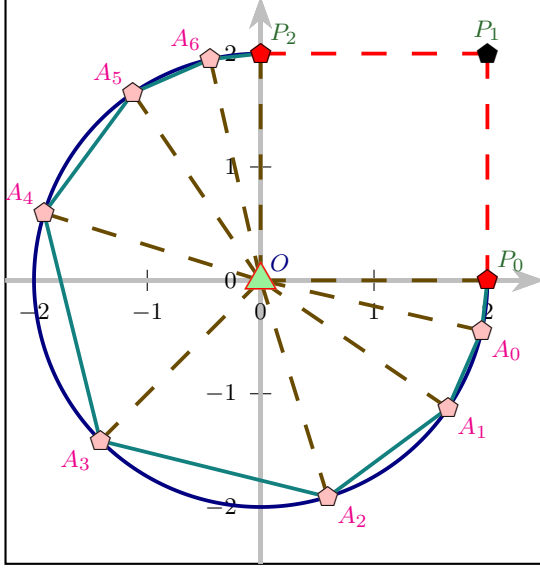
2. Ensemble des nombres complexes massiques

Dans ce paragraphe, nous construisons l'ensemble des nombres complexes massiques $\tilde{\mathbb{C}}$, en tant que l'union du plan réel muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, et du plan vectoriel muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, où un vecteur $\vec{u}(a; b)$ est représenté par le nombre complexe :

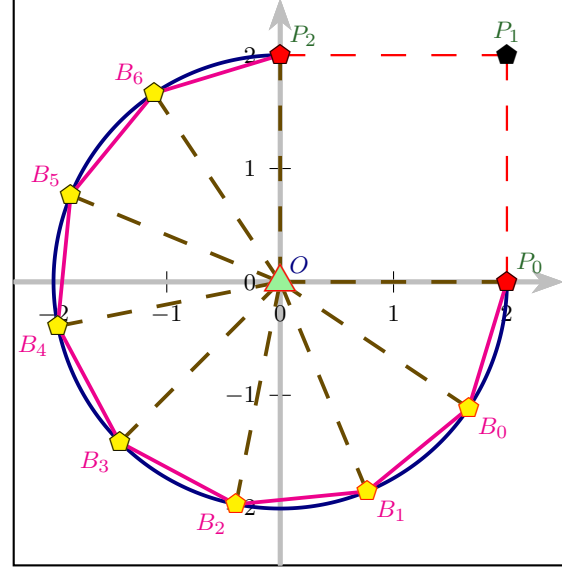
$$z_{\vec{u}} = a + \imath b = a \mathbf{1}_{\mathbf{R}} + b \imath$$

Angle	$\widehat{P_0OA_0}$	$\widehat{A_0OA_1}$	$\widehat{A_1OA_2}$	$\widehat{A_2OA_3}$	$\widehat{A_3OA_4}$	$\widehat{A_4OA_5}$	$\widehat{A_5OA_6}$	$\widehat{A_6OP_2}$
Value	12.82	21.46	38.50	62.23	62.23	38.50	21.46	12.82

TABLE 1 – Angles, en degré, entre deux points consécutifs et le centre du cercle de la figure 2a.



(a) Algorithme projectif de De Casteljau



(b) L'algorithme de De Casteljau basé sur le changement de paramètre homographique

FIGURE 2 – Illustration sur un trois-quart de cercle de la différence dans la distribution des points construits par l'algorithme projectif De Casteljau et notre algorithme basé sur le changement de paramètre homographique.

et un point pondéré $M(a; b)$, de poids ω , a pour affixe pondérée :

$$\widetilde{z}_M = a + \imath b + \omega \kappa = a \mathbf{1}_R + b \imath + \omega \kappa$$

et, un nombre complexe massique est de la forme

$$\widetilde{z} = z + \omega \kappa$$

où $(z; \omega) \in \mathbb{C}^2$: si $\omega = 0$, \widetilde{z} représente le vecteur du plan d'affixe z tandis que dans l'autre cas, \widetilde{z} représente le point pondéré d'affixe z et de poids ω . Naturellement, nous avons $\mathbb{C} \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ et les nombres complexes sont les nombres complexes massiques de masse nulle. Il reste à adapter l'addition et la multiplication par un scalaire. Soit $\widetilde{z}_1 = z_1 + \omega_1 \kappa$ et $\widetilde{z}_2 = z_2 + \omega_2 \kappa$ deux complexes massiques. Alors :

- $\omega_1 + \omega_2 = 0$ et $\omega_1 \omega_2 \neq 0$ implique :

$$\widetilde{z}_1 \oplus \widetilde{z}_2 = (z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus (z_2 - \omega_1 \kappa) = \omega_1 (z_1 - z_2)$$

qui représente le vecteur d'affixe $\omega_1 (z_1 - z_2)$;

- $(z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus (z_1 - \omega_1 \kappa) = 0$;

- $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ implique :

$$\begin{aligned} \widetilde{z}_1 \oplus \widetilde{z}_2 &= (z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus (z_2 + \omega_2 \kappa) \\ &= \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} (\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2) + (\omega_1 + \omega_2) \kappa \end{aligned}$$

qui représente le point pondéré d'affixe $\frac{1}{\omega_1 + \omega_2} (\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2)$ et de poids $\omega_1 + \omega_2$;

- $\omega_1 = \omega_2 = 0 \implies \widetilde{z}_1 \oplus \widetilde{z}_2 = z_1 + z_2$ qui représente le vecteur d'affixe $z_1 + z_2$;

- $\omega_1 \neq 0$ et $\omega_2 = 0$ implique :

$$\widetilde{z}_1 \oplus \widetilde{z}_2 = (z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus z_2 = z_1 + \frac{1}{\omega_1} z_2 + \omega_1 \kappa$$

qui représente le point pondéré d'affixe $z_1 + \frac{1}{\omega_1} z_2$ et de poids ω_1 .

Evidemment, l'addition \oplus est commutative. Nous définis-

sons la multiplication par un scalaire, notée \odot , de la façon suivante :

- $\alpha = 0 \implies \alpha \odot \tilde{z}_1 = 0$
- $\alpha \neq 0$ et $\omega_1 = 0 \implies \alpha \odot \tilde{z}_1 = \alpha z_1$;
- $\alpha \times \omega_1 \neq 0 \implies \alpha \odot \tilde{z}_1 = z_1 + \alpha \omega_1 \kappa$.

Si le point pondéré M_1 a pour affixe $\tilde{z}_1 = z_1 + \omega_1 \kappa$ alors le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ a pour affixe z_1 c'est-à-dire que :

$$z_1 = \frac{1}{\omega_1} \odot \tilde{z}_1 \oplus -\kappa = (z_1 + \kappa) \oplus (0 - \kappa) \quad (1)$$

Si \tilde{z}_1 est un nombre complexe massique, alors z_1 est l'affixe du point ou du vecteur définie par \tilde{z}_1 .

3. Courbe de Bézier rationnelles quadratiques à nombres complexes massiques de contrôle

3.1. Définition

Pour $i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, considérons les trois points massiques suivants

$$\tilde{z}_i = z_i + \omega_i \kappa \quad (2)$$

et la courbe de Bézier rationnelle quadratiques, de nombres complexes massiques de contrôle est γ définie en utilisant I l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls et J l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids nuls. Pour t_0 de $[0; 1]$, si nous avons :

$$\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0) \neq 0 \quad (3)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma(t)} &= \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t)} \odot (B_0(t) \odot \tilde{z}_0) \\ &\oplus \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t)} \odot (B_1(t) \odot \tilde{z}_1) \\ &\oplus \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t)} \odot (B_2(t) \odot \tilde{z}_2) \end{aligned} \quad (4)$$

tandis que dans le cas contraire, nous obtenons :

$$\widetilde{\gamma(t)} = B_0(t) \odot \tilde{z}_0 \oplus B_1(t) \odot \tilde{z}_1 \oplus B_2(t) \odot \tilde{z}_2$$

L'utilisation des points massiques permet de modéliser des branches d'hyperboles, des demi-ellipses et des arcs non bornés de parabole [Béc97]. L'utilisation de changements de paramètres homographiques, définition 1, permet de déterminer les caractéristiques de la conique propre sous-jacente à ce type de courbe de Bézier [Béc97]. L'utilisation des courbes de Bézier à points massiques de contrôle permet de garder le degré de la courbe de Bézier initiale lors de l'application d'une inversion. Ainsi, une Lemniscate de Bernoulli

ou un Limaçon de Pascal, image d'une hyperbole par une inversion, sont représentés par des courbes de Bézier quadratique. En n'utilisant que des poids réels, leur degré que 4 [BFG21].

3.2. Vecteurs tangents aux extrémités

Rappelons les théorèmes concernant les vecteurs tangents aux points extrémaux à une courbe de Bézier à points massiques de contrôle. Nous avons :

Théorème 1 (Vecteur vitesse en 0 à une courbe de Bézier de degré 2)

Soit γ une courbe de Bézier de nombres complexes massiques de contrôle :

$$\tilde{z}_i = z_i + \omega_i \kappa$$

où $i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$.

Deux cas sont à distinguer :

— si $\omega_1 = 0$, le vecteur vitesse à la courbe en P_0 est :

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt}(0) \left(\frac{2}{\omega_0} z_1 \right) \quad (5)$$

— si $\omega_1 \neq 0$, le vecteur vitesse à la courbe en P_0 est :

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt}(0) \left(2 \frac{\omega_1}{\omega_0} (z_1 - z_0) \right) \quad (6)$$

Démonstration : [GBF23] en utilisant les affixes des points massiques de contrôle.

■

Théorème 2 (Vecteur vitesse en 1 à une courbe de Bézier de degré 2)

Soit γ une courbe de Bézier de nombres complexes massiques de contrôle :

$$\tilde{z}_i = z_i + \omega_i \kappa$$

où $i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$.

Deux cas sont à distinguer :

— si $\omega_1 = 0$, le vecteur vitesse à la courbe en P_2 est :

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt}(1) \left(-\frac{2}{\omega_2} z_1 \right) \quad (7)$$

— si $\omega_1 \neq 0$, le vecteur vitesse à la courbe en P_n est :

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt}(1) \left(2 \frac{\omega_1}{\omega_2} (z_2 - z_1) \right) \quad (8)$$

Démonstration : [GBF23] en utilisant les affixes des points massiques de contrôle.

■

3.3. Adaptation de l'algorithme de De Casteljau

Pour obtenir un algorithme de De Casteljau transformant une courbe de Bézier rationnelle sous forme standard en

deux courbes de Bézier rationnelles sous forme standard, nous introduisons le changement de paramètre homographique qui permet de conserver le degré de la courbe initiale, définition 1.

3.3.1. Théorie

Définition 1 (: Changement de paramètre homographique d'une courbe de Bézier)

Soit γ une courbe de Bézier de degré n de points massiques de contrôle $(\tilde{p}_i)_{i \in [0;n]}$.

Soit les réels a, b, c et d vérifiant :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad (9)$$

Soit h la fonction homographique de $\overline{\mathbf{R}}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ définie par :

$$h(u) = \frac{a(1-u) + bu}{c(1-u) + du} \quad (10)$$

Alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de degré n de points massiques de contrôle $(\tilde{q}_i)_{i \in [0;n]}$ dont les expressions dépendent du degré de la courbe.

Théorème 3 (: Changement de paramètre homographique pour le degré 2)

Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle \tilde{p}_0, \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 , de support la conique \mathcal{C} .

Soit h définie par la formule (10), alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques \tilde{q}_0, \tilde{q}_1 et \tilde{q}_2 , de support la conique \mathcal{C} avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}_0 = (c-a)^2 \odot \tilde{p}_0 \\ \oplus 2a(c-a) \odot \tilde{p}_1 \\ \oplus a^2 \odot \tilde{p}_2 \\ \tilde{q}_1 = (c-a)(d-b) \odot \tilde{p}_0 \\ \oplus (b(c-a) + a(d-b)) \odot \tilde{p}_1 \\ \oplus ab \odot \tilde{p}_2 \\ \tilde{q}_2 = (d-b)^2 \odot \tilde{p}_0 \\ \oplus 2b(d-b) \odot \tilde{p}_1 \\ \oplus b^2 \odot \tilde{p}_2 \end{array} \right. \quad (11)$$

Nous allons utiliser le théorème 3 pour envoyer $[0; 1]$ sur $[0; \frac{1}{2}]$ via h_1 d'une part et sur $[\frac{1}{2}; 1]$ via h_2 d'autre part.

Théorème 4 (: Définition de h_1)

Soit h_1 la fonction homographique de $\overline{\mathbf{R}}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ définie par :

$$h_1(u) = \frac{u}{(1-u) + 2u} = \frac{u}{1+u} \quad (12)$$

Alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de degré n de points massiques de contrôle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}_0 = \tilde{p}_0 \\ \tilde{q}_1 = \tilde{p}_0 \oplus \tilde{p}_1 \\ \tilde{q}_2 = \tilde{p}_0 \oplus 2 \odot \tilde{p}_1 \oplus \tilde{p}_2 \end{array} \right. \quad (13)$$

Démonstration : En appliquant la formule (11), nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}_0 = c^2 \odot \tilde{p}_0 \\ \tilde{q}_1 = bc \odot \tilde{p}_0 \oplus bc \odot \tilde{p}_1 \\ \tilde{q}_2 = b^2 \odot \tilde{p}_0 \oplus 2b^2 \odot \tilde{p}_1 \oplus b^2 \odot \tilde{p}_2 \end{array} \right.$$

et pour ne pas changer les poids ou les vecteurs extrémaux, nous prenons $b = c = 1$.

■

Théorème 5 (: Définition de h_2)

Soit h_2 la fonction homographique de $\overline{\mathbf{R}}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ définie par :

$$h_2(u) = \frac{(1-u) + u}{2(1-u) + u} = \frac{1}{2-u} \quad (14)$$

Alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de degré n de points massiques de contrôle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}_0 = \tilde{p}_0 \oplus 2 \odot \tilde{p}_1 \oplus \tilde{p}_2 \\ \tilde{q}_1 = \tilde{p}_1 \oplus \tilde{p}_2 \\ \tilde{q}_2 = \tilde{p}_2 \end{array} \right. \quad (15)$$

Démonstration : En appliquant la formule (11), nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}_0 = a^2 \odot \tilde{p}_0 \oplus 2a^2 \odot \tilde{p}_1 \oplus a^2 \odot \tilde{p}_2 \\ \tilde{q}_1 = ab \odot \tilde{p}_1 \oplus ab \odot \tilde{p}_2 \\ \tilde{q}_2 = b^2 \odot \tilde{p}_2 \end{array} \right.$$

et pour ne pas changer les poids ou les vecteurs extrémaux, nous prenons $b = a = 1$.

■

Notons que nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1(1) = h_2(0) = \frac{1}{2} \\ h'_1(1) = h'_2(0) = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

La figure 3 montre les représentations graphiques des fonctions h_1 et h_2 .

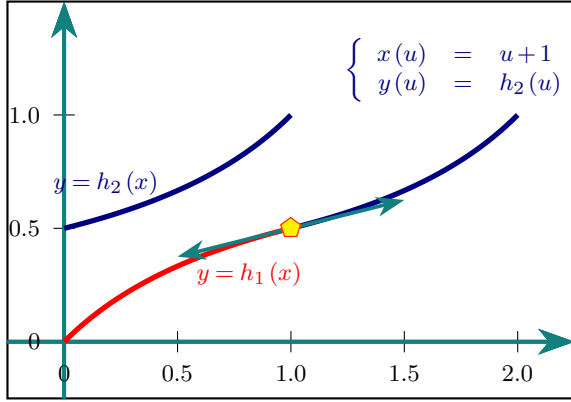


FIGURE 3 – Représentations graphiques des fonctions h_1 et h_2 .

3.3.2. Application à une boucle d'une lemniscate de Bernoulli

Une Lemniscate de Bernoulli est l'image d'une hyperbole équilatère dont le pôle de l'inversion et le centre de l'hyperbole. Les détails concernant l'hyperbole équilatère et l'inversion, de rapport $k = 2$, sont disponibles dans [BFG21], les points complexes massiques de contrôle sont :

$$\begin{cases} \tilde{p}_0 &= -\kappa 2i \\ \tilde{p}_1 &= 2 \\ \tilde{p}_2 &= \kappa 2 \end{cases} \quad (16)$$

c'est-à-dire : $p_0 = p_2 = 0$, $p_1 = 2$, $\omega_0 = -2i$, $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 2$, figure 4.

L'équation (quadratique) complexe de la boucle de la Lemniscate de Bernoulli est :

$$z_B(t) = \frac{2(t-t^2)}{(1-i)t^2 + 2it - i}$$

tandis que l'équation réelle quartique est :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{2t^3(1-t)}{t^4 + (t-1)^4} \\ y(t) &= \frac{2t(1-t)^3}{t^4 + (t-1)^4} \end{cases}$$

En utilisant la formule (13), nous avons :

$$\begin{aligned} - \tilde{q}_0 &= \tilde{p}_0 = -\kappa 2i \\ - \tilde{q}_1 &= \tilde{p}_0 \oplus \tilde{p}_1 = -2i\kappa \oplus 2 = 2 - \kappa 2i \\ - \tilde{q}_2 &= \tilde{p}_0 \oplus 2 \odot \tilde{p}_1 \oplus \tilde{p}_2 \\ &= -2i\kappa \oplus 2 \odot 2 \oplus 2\kappa \\ &= 4 \oplus \kappa(2 - 2i) \\ &= \frac{2}{1-i} \oplus \kappa(2 - 2i) \\ &= 1 + i + \kappa(2 - 2i) \end{aligned}$$

En utilisant la formule (15), nous avons :

$$\begin{aligned} - \tilde{r}_0 &= \tilde{p}_0 \oplus 2 \odot \tilde{p}_1 \oplus \tilde{p}_2 \\ &= \tilde{q}_2 \\ &= 1 + i + \kappa(2 - 2i) \\ - \tilde{r}_1 &= \tilde{p}_1 \oplus \tilde{p}_2 = 2 \oplus \kappa 2 = 1 + \kappa 2 \\ - \tilde{r}_2 &= \tilde{p}_2 = \kappa 2 \end{aligned}$$

La première itération de l'algorithme de De Casteljau est illustrée dans la figure 4.

Concernant la seconde itération.

$$\begin{aligned} - \tilde{s}_0 &= \tilde{q}_0 = -\kappa 2i \\ - \tilde{s}_1 &= \tilde{q}_0 \oplus \tilde{q}_1 \\ &= -2i\kappa \oplus 2 - \kappa 2i \\ &= \frac{i}{2} - \kappa 4i \\ - \tilde{s}_2 &= \tilde{q}_0 \oplus 2 \odot \tilde{q}_1 \oplus \tilde{q}_2 \\ &= -2i\kappa \oplus 2 \odot 2 - \kappa 2i \oplus 1 + i + \kappa(2 - 2i) \\ &= \frac{4}{17} + \frac{16}{17}i \oplus \kappa(2 - 8i) \end{aligned}$$

En utilisant la formule (15); nous avons :

$$\begin{aligned} - \tilde{t}_0 &= \tilde{q}_0 \oplus 2 \odot \tilde{q}_1 \oplus \tilde{q}_2 \\ &= \tilde{s}_2 \\ &= \frac{4}{17} + \frac{16}{17}i \oplus \kappa(2 - 8i) \\ - \tilde{t}_1 &= \tilde{q}_1 \oplus \tilde{q}_2 = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i \oplus \kappa(2 - 4i) \\ - \tilde{t}_2 &= \tilde{q}_2 = 1 + i + \kappa(2 - 2i) \\ - \tilde{u}_0 &= \tilde{r}_0 = 1 + i + \kappa(2 - 2i) \\ - \tilde{u}_1 &= \tilde{r}_0 \oplus \tilde{r}_1 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i \oplus \kappa(4 - 2i) \\ - \tilde{u}_2 &= \tilde{r}_0 \oplus 2 \odot \tilde{r}_1 \oplus \tilde{r}_2 \\ &= \frac{16}{17} + \frac{4}{17}i \oplus \kappa(8 - 2i) \end{aligned}$$

En utilisant la formule (15); nous avons :

$$\begin{aligned} - \tilde{v}_0 &= \tilde{r}_0 \oplus 2 \odot \tilde{r}_1 \oplus \tilde{r}_2 \\ &= \tilde{u}_2 \\ &= 1 + i + \kappa(2 - 2i) \\ - \tilde{v}_1 &= \tilde{r}_1 \oplus \tilde{r}_2 = \frac{1}{2} + \kappa 4 \end{aligned}$$

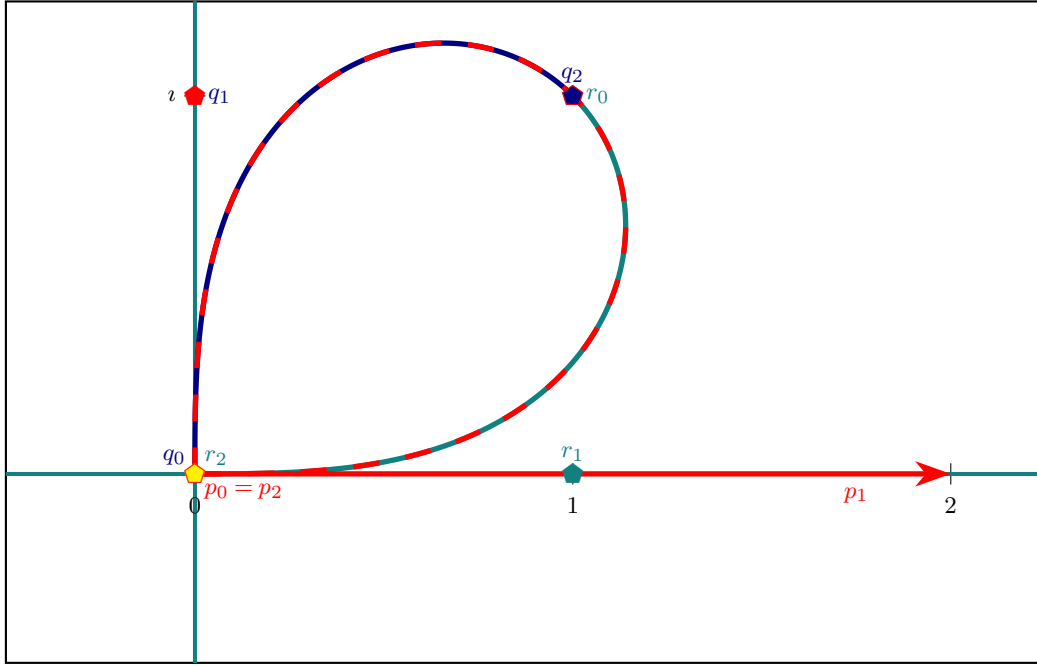


FIGURE 4 – Première itération de l'algorithme de De Casteljau appliqué à une courbe de Bézier quadratique à poids complexes représentant une boucle d'une Lemniscate de Bernoulli.

$$— \tilde{v}_2 = \tilde{r}_2 = 2\kappa$$

La première itération de l'algorithme de De Casteljau est illustrée dans la figure 5.

4. Modélisation d'arc de cercle par des courbes de Bézier rationnelles linéaires

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le plan complexe \mathbf{C} muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit quatre complexes z_0, z_1, ω_0 et ω_2 avec $z_0 \neq z_1, \omega_0\omega_2 \neq 0$ et $\arg(\omega_0) \neq \arg(\omega_1)$. Considérons la courbe de Bézier rationnelle linéaire définie par :

$$z(t) = \frac{(1-t)\omega_0 z_0 + t\omega_1 z_1}{(1-t)\omega_0 + t\omega_1}, t \in [0; 1]$$

Remarquons que :

- si $\arg(\omega_0) = \arg(\omega_1) [2\pi]$, la courbe est le segment dont les extrémités ont pour affixes z_0 et z_1 ;
- si $\arg(\omega_0) = -\arg(\omega_1) [2\pi]$, la courbe est la droite définie par les affixes z_0 et z_1 privé du segment précédent ouvert ;
- sinon la courbe obtenue est un arc de cercle dont les extrémités ont pour affixes z_0 et z_1 [SR09].

Introduisons la fonction suivante :

$$\chi : \begin{array}{lll} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^* \\ 0 & \mapsto & 1 \\ x \neq 0 & \mapsto & x \end{array}$$

qui permet d'utiliser les mêmes formules pour manipuler les points et les vecteurs. Notons qu'en exprimant $z(t)$ sous forme algébrique, le dénominateur devient un polynôme quadratique à coefficients réels n'ayant pas de racines réelles (c'est le carré du module d'un nombre complexe non nul) : nous obtenons une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(Z_0; \varpi_0), (Z_1; \varpi_1)$ et $(Z_2; \varpi_2)$ avec :

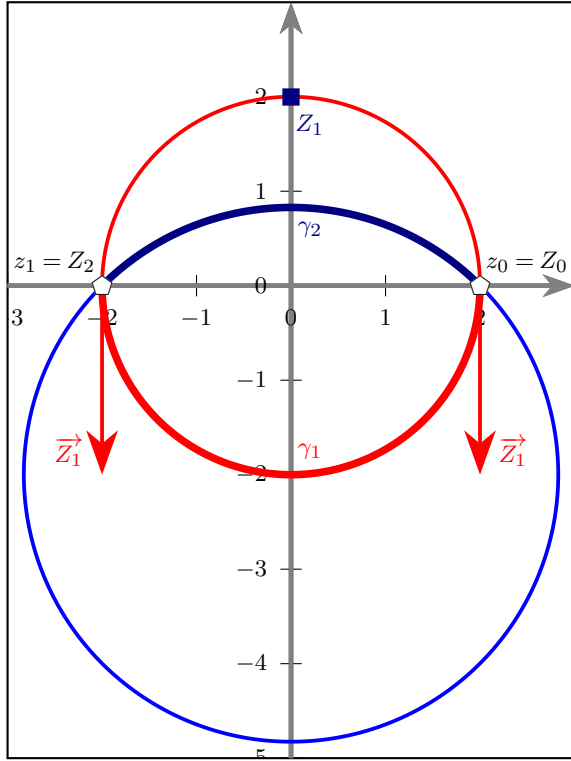
$$\left\{ \begin{array}{lcl} Z_0 & = & z_0 \\ Z_1 & = & \frac{\omega_0 \overline{\omega_1} z_0 + \overline{\omega_0} \omega_1 z_1}{2\chi\left(\frac{\omega_0 \overline{\omega_1} + \overline{\omega_0} \omega_1}{2}\right)} \\ Z_2 & = & z_1 \\ \varpi_0 & = & |\omega_0|^2 \\ \varpi_1 & = & \frac{\omega_0 \overline{\omega_1} + \overline{\omega_0} \omega_1}{2} \\ \varpi_2 & = & |\omega_1|^2 \end{array} \right. \quad (17)$$

et il est aisé de remarquer que si $\varpi_1 \neq 0$, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} |Z_1 - Z_0| = |Z_1 - Z_2| \\ \left(\frac{\overline{Z_1 - Z_0}(Z_2 - Z_0) + (Z_1 - Z_0)\overline{Z_2 - Z_0}}{2|Z_1 - Z_0| \times |Z_2 - Z_0|} \right)^2 = \frac{\varpi_1^2}{\varpi_0 \varpi_2} \end{array} \right.$$

	γ_1	γ_2
ϖ_0	1	1
ϖ_1	$\frac{1 \times (-i) + 1 \times i}{2} = 0$	$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{2} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$
ϖ_2	1	$\frac{1}{4}$
Z_1	$\frac{1 \times (-i) \times 2 + 1 \times i \times -2}{2} = -2i$	$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{2} \times 2 + e^{-i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{2} \times -2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) i = 2i$

TABLE 2 – Affixes massiques de contrôle correspondant à la figure 6 lorsque nous n'utilisons que des poids réels.

FIGURE 6 – Le demi-cercle γ_1 est obtenu avec $z_0 = 2$, $z_1 = -2$, $\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = i$ tandis que l'arc de cercle γ_2 est obtenu avec $z_0 = 2$, $z_1 = -2$, $\omega_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\omega_1 = \frac{1}{2}$.

et nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}(t) = \omega_0 (1-t)^n z_0 \\ \quad + n\chi(\omega_1) t (1-t)^{n-1} z_1 \\ \quad + \mathcal{N}_3(t) \\ \omega(t) = \omega_0 (1-t)^n \\ \quad + n\omega_1 t (1-t)^{n-1} \\ \quad + \mathcal{D}_3(t) \end{array} \right. \quad (20)$$

Si nous avons :

$$\omega(t) \neq 0$$

alors un point $M_n(z(t))$ de la courbe de Bézier est défini par

$$z(t) = \frac{1}{\omega(t)} \mathcal{N}(t)$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) &= -n\omega_0 (1-t)^{n-1} z_0 \\ &\quad + n\chi(\omega_1) (1-t)^{n-1} \widetilde{P}_1 + \varphi(t) \end{aligned}$$

avec $\varphi(0) = 0$ d'une part et :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{D}(t) = -n\omega_0 (1-t)^{n-1} + n\omega_1 (1-t)^{n-1} + \psi(t)$$

avec $\psi(0) = 0$ d'autre part. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}(0) = \omega_0 z_0 \\ \mathcal{D}(0) = \omega_0 \\ \frac{d}{dt} \mathcal{N}(0) = -n\omega_0 z_0 + n\chi(\omega_1) z_1 \\ \frac{d}{dt} \mathcal{D}(0) = n(\omega_1 - \omega_0) \end{array} \right.$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} z(0) \\ &= \frac{\mathcal{D}(0) \frac{d}{dt} \mathcal{N}(0) - \frac{d}{dt} \mathcal{D}(0) \mathcal{N}(0)}{(\mathcal{D}(0))^2} \\ &= \frac{\omega_0 (-n\omega_0 z_0 + n\chi(\omega_1) z_1) - n(\omega_1 - \omega_0) \omega_0 z_0}{\omega_0^2} \\ &= \frac{(-n\omega_0 z_0 + n\chi(\omega_1) z_1) - n(\omega_1 - \omega_0) z_0}{\omega_0} \\ &= \frac{-n\omega_0 z_0 + n\chi(\omega_1) z_1 - n\omega_1 z_0 + n\omega_0 z_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{n\chi(\omega_1)z_1 - n\omega_1 z_0}{\omega_0}$$

et deux cas sont à distinguer :

— si $\omega_1 = 0$, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}z(0) = \frac{n}{\omega_0}z_1$$

et

— si $z_1 = 0$ alors le point $P_0(z_0)$ est un point stationnaire ;

— sinon, le vecteur tangent en P_0 est :

$$\frac{n}{\omega_0}\vec{P_1}$$

— si $\omega_1 \neq 0$, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}z(0) = n\frac{\omega_1}{\omega_0}(z_1 - z_0)$$

et

— si $z_1 = z_0$ alors le point $P_0(z_0)$ est un point stationnaire ;

— sinon, le vecteur tangent en P_0 est :

$$n\frac{\omega_1}{\omega_0}\vec{P_0P_1}$$

■

Etant donné la symétrie des courbes de Bézier, nous pouvons énoncer :

Théorème 7

Soit ω_n un réel non nul. Soit une courbe de Bézier de degré n , de points complexes massiques de contrôle ..., \widetilde{z}_{n-1} , \widetilde{z}_n .

Quatre cas sont à distinguer :

— si $\widetilde{z}_{n-1} = 0$ (donc $\omega_{n-1} = 0$), le point $P_n(z_n)$ est un point stationnaire ;

— si $\omega_{n-1} = 0$ et $z_{n-1} \neq 0$, le vecteur vitesse à la courbe en $P_n(z_n)$ est :

$$-\frac{n}{\omega_n}\vec{P_{n-1}} \quad (21)$$

— si $\omega_{n-1} \neq 0$, si $z_{n-1} = z_n$ alors le point $P_n(z_n)$ est un point stationnaire ;

— si $\omega_{n-1} \neq 0$ et $z_{n-1} \neq z_n$, le vecteur vitesse à la courbe en P_n a pour affixe :

$$-n\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}(z_{n-1} - z_n) \quad (22)$$

Nous pouvons en déduire des propriétés sur les courbes quadratiques :

Corollaire 1

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\widetilde{z}_j = z_j + \omega_j\kappa$, $j \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, vérifiant $\omega_0 \times \omega_2 \neq 0$ et $z_0 \neq z_2$.

— les points $P_0(z_0)$ et $P_2(z_2)$ sont stationnaires ssi $\widetilde{z}_1 = 0$

(i.e. le point de contrôle intermédiaire est le vecteur nul $\vec{0}$);

— pour $k \in \{0; 2\}$ le point P_k est stationnaire et le point P_{2-k} n'est pas stationnaire ssi $z_1 = z_{2-k}$

5.2. Deux points extrémaux

Le théorème suivant permet de modéliser un arc de cercle avec deux extrémités stationnaires :

Théorème 8 (: Arc de cercle à extrémités stationnaires)

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\widetilde{z}_0 = z_0 + \kappa$, $\widetilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\widetilde{z}_2 = z_2 + \omega_2\kappa$ vérifiant $z_0 \neq z_2$. Posons :

$$z_I = \frac{z_0 + z_2}{2}$$

— La courbe γ est un arc de cercle si et seulement si $\omega_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ et le centre Ω du cercle a pour affixe :

$$\begin{aligned} z_\Omega &= z_I + \frac{\operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)} i \frac{z_0 - z_2}{2} \\ &= z_I + \frac{1}{\tan(\arg(\omega_2))} i \frac{z_0 - z_2}{2} \end{aligned} \quad (23)$$

— La courbe γ est un segment ssi $\omega_2 \in \mathbf{R}$

Démonstration :

Soit

$$z_3 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{z_0 + \omega_2 z_2}{1 + \omega_2}$$

Pour $t \in \mathbf{R} - \left\{0; 1; \frac{1}{2}\right\}$, nous allons montrer que le bi-rapport :

$$[z_0; z_2, z_3; \gamma(t)] = \frac{(z_0 - z_2)(z_3 - \gamma(t))}{(z_0 - \gamma(t))(z_3 - z_2)}$$

est un nombre réel. Nous avons :

$$z_3 - \gamma(t) = \frac{\omega_2(1-2t)(z_2 - z_0)}{(1 + \omega_2)((1 + \omega_2)t^2 + 1 - 2t)}$$

et :

$$z_0 - \gamma(t) = \frac{\omega_2(z_0 - z_2)t^2}{(1 + \omega_2)t^2 + 1 - 2t}$$

et :

$$z_3 - z_2 = \frac{z_0 - z_2}{1 + \omega_2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &[z_0; z_2, z_3; \gamma(t)] \\ &= \frac{(z_0 - z_2)(z_3 - \gamma(t))}{(z_0 - \gamma(t))(z_3 - z_2)} \\ &= \frac{(z_0 - z_2) \frac{\omega_2(1-2t)(z_2 - z_0)}{(1 + \omega_2)((1 + \omega_2)t^2 + 1 - 2t)}}{\frac{\omega_2(z_0 - z_2)t^2}{(1 + \omega_2)t^2 + 1 - 2t} \frac{z_0 - z_2}{1 + \omega_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_2(1-2t)}{(1+\omega_2)((1+\omega_2)t^2+1-2t)} \\
&= \frac{\omega_2(1-2t)}{(1+\omega_2)t^2+1-2t} \cdot \frac{1}{1+\omega_2} \\
&= \frac{\omega_2(1-2t)}{(1+\omega_2)((1+\omega_2)t^2+1-2t)} \\
&\times \frac{(1+\omega_2)((1+\omega_2)t^2+1-2t)}{\omega_2 t^2} \\
&= \frac{1-2t}{t^2} \in \mathbf{R}
\end{aligned}$$

ce qui montre que les points d'affixes $z_0, z_2, z_3 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\gamma(t)$ sont cocycliques ou alignés.

Concernant le centre, nous avons :

$$\frac{z_0 + z_3}{2} + k_3 i \frac{z_0 - z_3}{2} = \frac{z_0 + z_2}{2} + k_2 i \frac{z_0 - z_2}{2}$$

équivalent à :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{z_0 + z_3}{2} + k_3 i \frac{z_0 - z_3}{2}\right) = \\ \operatorname{Re}\left(\frac{z_0 + z_2}{2} + k_2 i \frac{z_0 - z_2}{2}\right) \\ \operatorname{Im}\left(\frac{z_0 + z_3}{2} + k_3 i \frac{z_0 - z_3}{2}\right) = \\ \operatorname{Im}\left(\frac{z_0 + z_2}{2} + k_2 i \frac{z_0 - z_2}{2}\right) \end{cases}$$

et les solutions sont :

$$\begin{cases} k_2 = \frac{\operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)} \\ k_3 = \frac{1 + \operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)} \end{cases}$$

et le centre du cercle est :

$$\begin{cases} z_\Omega = \frac{z_0 + z_2}{2} + \frac{\operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)} i \frac{z_0 - z_2}{2} \\ = \frac{z_0 + z_3}{2} + \frac{1 + \operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)} i \frac{z_0 - z_3}{2} \end{cases}$$

■

Nous avons déterminé le centre du cercle à partir du poids ω_2 , nous allons maintenant calculer ω_2 connaissant le cercle support de la courbe de Bézier.

Théorème 9 (: Poids ω_2 connaissant le centre du cercle)

Soit $\Omega(z_\Omega)$ le centre d'un cercle \mathcal{C} , deux points $P_0(z_0)$ et $P_2(z_2)$ de ce cercle non diamétralement opposés.

Soit $\omega_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$. Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + \kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \omega_2\kappa$ vérifiant $z_0 \neq z_2$.

La courbe γ est un arc du cercle \mathcal{C} d'extrémités stationnaires P_0 et P_2 si et seulement si :

$$\operatorname{Re}(\omega_2) = \frac{z_0 + z_2 - 2z_\Omega}{z_0 - z_2} i \operatorname{Im}(\omega_2)$$

c'est-à-dire :

$$\omega_2 = \lambda \left(\frac{z_0 + z_2 - 2z_\Omega}{z_0 - z_2} i + i \right) \quad (24)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
z_\Omega &= \frac{z_0 + z_2}{2} + \frac{\operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)} i \frac{z_0 - z_2}{2} \\
\iff z_\Omega - \frac{z_0 + z_2}{2} &= \frac{\operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)} i \frac{z_0 - z_2}{2} \\
\iff \frac{2z_\Omega - z_0 - z_2}{2} &= \frac{\operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)} i \frac{z_0 - z_2}{2} \\
\iff -\frac{2z_\Omega - z_0 - z_2}{z_0 - z_2} i &= \frac{\operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)} \\
\iff \frac{z_0 + z_2 - 2z_\Omega}{z_0 - z_2} i &= \frac{\operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{Re}(\omega_2) = \frac{z_0 + z_2 - 2z_\Omega}{z_0 - z_2} i \operatorname{Im}(\omega_2)$$

■

Déterminons l'autre partie de la courbe via le changement de paramètre homographique :

$$h : u \mapsto \frac{1-u}{1-u-u} = \frac{1-u}{1-2u}$$

et nous avons $a = c = 1$, $b = 0$ et $d = -1$ dans le théorème 1. D'après le théorème 3, les nouveaux nombres complexes massiques de contrôle sont :

$$\begin{cases} \tilde{q}_0 = \tilde{z}_2 \\ \tilde{q}_1 = 0 \\ \tilde{q}_2 = \tilde{z}_0 \end{cases} \quad (25)$$

c'est-à-dire que les nombres complexes massiques de contrôle sont les mêmes, seul l'ordre change.

Théorème 10 (: Modélisation d'un arc de cercle avec deux points extrémaux stationnaires)

Soit $\Omega(z_\Omega)$ le centre du cercle \mathcal{C} de rayon ρ .

Soit $P_0(z_0)$ et $P_2(z_2)$ deux points de \mathcal{C} vérifiant et z_Ω trois complexes distincts vérifiant :

$$(\Omega P_0) \perp (\Omega P_2)$$

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \omega_2\kappa$ où ω_2 est donné par la formule (23).

Soit $\Lambda(z_\Lambda)$ le symétrique de Ω par rapport à la droite $(P_0 P_2)$.

Soit γ_1 la courbe de Bézier quadratique de points complexes

massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \overline{\omega_2}\kappa$

Alors la courbe γ_1 est un arc du cercle de centre $\Lambda(z_\Lambda)$ et de rayon ρ de points stationnaires $P_0(z_0)$ et $P_2(z_2)$ et les courbes γ et γ_1 sont symétriques par rapport à la droite (P_0P_2) .

Démonstration :

D'après la formule (23), nous avons :

$$\begin{aligned} z_\Omega &= \frac{z_0 + z_2}{2} + \frac{\operatorname{Re}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_2)} i \frac{z_0 - z_2}{2} \\ &= \frac{z_0 + z_2}{2} - \frac{\operatorname{Re}(\omega_2)}{-\operatorname{Im}(\omega_2)} i \frac{z_0 - z_2}{2} \\ &= \frac{z_0 + z_2}{2} - \frac{\operatorname{Re}(\overline{\omega_2})}{\operatorname{Im}(\overline{\omega_2})} i \frac{z_0 - z_2}{2} \end{aligned}$$

Or :

$$z_\Lambda = \frac{z_0 + z_2}{2} + \frac{\operatorname{Re}(\overline{\omega_2})}{\operatorname{Im}(\overline{\omega_2})} i \frac{z_0 - z_2}{2}$$

d'où :

$$\frac{z_0 + z_2}{2} = \frac{z_\Omega + z_\Lambda}{2}$$

■

Notons que dans la formule (23) :

- le module ω_2 n'intervient que sur la cinématique de la courbe de Bézier.
- la partie :

$$\frac{z_0 + z_2}{2}$$

est l'abscisse du milieu I du segment $[P_0P_2]$;

- la partie :

$$i \frac{z_0 - z_2}{2}$$

est l'abscisse d'un vecteur $\overrightarrow{P_0P_2}$ orthogonal au vecteur $\overrightarrow{P_0P_2}$ et de norme $\frac{1}{2}P_0P_2$;

- le point z_Ω appartient à une demi-droite d'extrémité I et de support la médiatrice du segment $[P_0P_2]$, l'une des demi-droites caractérise l'argument de ω_2 tandis que l'autre caractérise l'argument de $\overline{\omega_2}$.

La figure 7 illustre le théorème 8 où la courbe γ_2 (resp. γ_3) est une courbe de Bézier rationnelle à points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = 1 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = i + (1 - 2i)\kappa$ (resp. $\tilde{z}_3 = i - (1 - 2i)\kappa$). Dans la suite de l'article, les points de contrôle stationnaires sont représentés par des triangles, les autres points des courbes de Bézier par de pentagones et les points de contrôle intermédiaires des courbes de Bézier par des carrés.

La figure 8 illustre les théorèmes 8 et 10 où la courbe γ_2 (resp. γ_3) est une courbe de Bézier rationnelle à points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = 1 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et

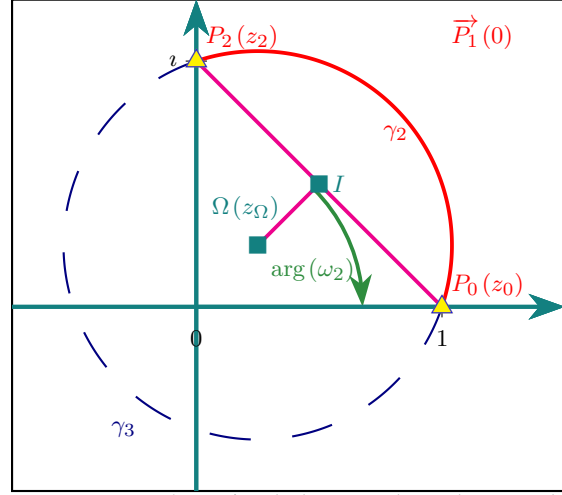


FIGURE 7 – Représentation de deux arcs de cercles ayant des points extrémaux stationnaires par deux courbes de Bézier rationnelles quadratiques à points complexes massiques de contrôle.

$\tilde{z}_2 = i + (1 - 2i)\kappa$ (resp. $\tilde{z}_3 = i - (1 - 2i)\kappa$). La courbe γ_4 (resp. γ_5) est une courbe de Bézier rationnelle à points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = 1 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = i + (1 + 2i)\kappa$ (resp. $\tilde{z}_3 = i - (1 + 2i)\kappa$).

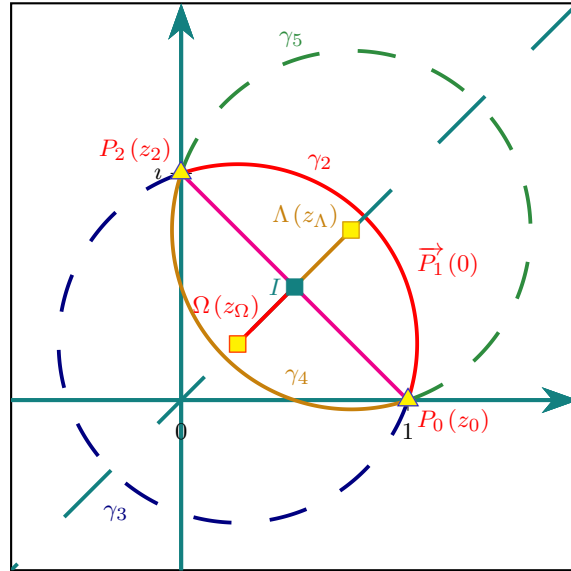


FIGURE 8 – Représentation de quatre arcs de cercles ayant des points extrémaux stationnaires par deux courbes de Bézier rationnelles quadratiques à points complexes massiques de contrôle en fonction d'un poids : ω_2 , $-\omega_2$, $\overline{\omega_2}$ et $-\overline{\omega_2}$.

Comme il n'y a que l'argument de ω_2 qui intervient, nous pouvons énoncer le lemme suivant :

Corollaire 2 (: Modélisation d'un arc de cercle avec deux points extrémaux stationnaires)

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + \kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \omega_2\kappa$ vérifiant $z_0 \neq z_2$ et $\omega_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Soit λ et μ deux réels non nuls.

Soit γ_1 la courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + \lambda\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \mu\omega_2\kappa$.

Alors les courbes γ et γ_1 sont deux arcs du même cercle de points stationnaires $P_0(z_0)$ et $P_2(z_2)$.

Il reste un degré de liberté et deux choix naturels se dégagent :

1. le point d'affixe $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ appartient à la médiatrice du segment $[P_0P_2]$;
2. nous fixons l'accélération au point P_0 .

Commençons par l'accélération.

Théorème 11 (: Modélisation d'un arc de cercle avec deux points extrémaux stationnaires)

Soit z_0, z_2 deux complexes distincts. Soit a un nombre complexe.

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = z_1 + \omega_1\kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \omega_2\kappa$ où $\omega_1 \in \mathbb{R}^*$.

Alors l'accélération de la courbe en z_0 est $\vec{a}(a)$ si :

$$\omega_2 = \frac{a}{2(z_2 - z_0)}$$

Démonstration : Nous avons :

$$\gamma(t) = \frac{(1-t)^2 z_0 + 2t(1-t)\omega_1 z_1 + t^2 \omega_2 z_2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)\omega_1 + t^2 \omega_2}$$

d'où :

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = \vec{0}$$

et :

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t)(2\omega_2(z_2 - z_0))$$

et :

$$2\omega_2(z_2 - z_0) = a \iff \omega_2 = \frac{a}{2(z_2 - z_0)}$$

■

5.2.1. Demi-cercles**Théorème 12 (: Modélisation d'un demi-cercle régulier avec deux points extrémaux stationnaires)**

Soit z_0, z_2 et z_Ω trois complexes distincts vérifiant :

$$z_\Omega = \frac{z_0 + z_2}{2}$$

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \varepsilon\iota\kappa$ avec $\varepsilon \in \{-1; 1\}$.

Alors la courbe γ est un demi-cercle de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de rayon $\rho = \left|\frac{z_0 - z_2}{2}\right|$ de points stationnaires $P_0(z_0)$ et $P_2(z_2)$ et tel que le point $P_3\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ appartiennent à la médiatrice de $[P_0P_2]$.

Démonstration : Connaissant le centre z_Ω du cercle, d'après la formule (24), nous avons :

$$\omega_2 = \lambda \left(\frac{z_0 + z_2 - 2z_\Omega}{z_0 - z_2} \iota + \iota \right) = \lambda \iota$$

Nous avons :

$$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_\Omega = \frac{(z_2 - z_0)(\lambda + \iota)}{2(\lambda - \iota)}$$

et :

$$\begin{aligned} & \overline{\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_\Omega(z_0 - z_2)} + \overline{z_0 - z_2} \left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_\Omega \right) \\ &= - \frac{(z_2 - z_0)^2 (\lambda^2 - 1)}{\lambda^2 + 1} \end{aligned}$$

Le point $P_3\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ appartient à la médiatrice de $[P_0P_2]$ ssi :

$$\overline{\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_\Omega(z_0 - z_2)} + \overline{z_0 - z_2} \left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_\Omega \right) = 0$$

ssi :

$$- \frac{(z_2 - z_0)^2 (\lambda^2 - 1)}{\lambda^2 + 1} = 0$$

ssi $\lambda \in \{-1; 1\}$.

■

La figure 9 illustre le théorème 8 où la courbe γ_2 (resp. γ_3) est une courbe de Bézier rationnelle à points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = 1 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = -1 + \iota\kappa$ (resp. $\tilde{z}_3 = -1 - \iota\kappa$).

5.2.2. Quart de cercles**Théorème 13 (: Modélisation d'un quart de cercle régulier avec deux points extrémaux stationnaires)**

Soit $\Omega(z_\Omega)$ le centre du cercle \mathcal{C} de rayon ρ .

Soit $P_0(z_0)$ et $P_2(z_2)$ deux points de \mathcal{C} vérifiant et z_Ω trois complexes distincts vérifiant :

$$(\Omega P_0) \perp (\Omega P_2)$$

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \iota)\kappa$.

Alors la courbe γ est un quart-cercle de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de rayon ρ de points stationnaires $P_0(z_0)$ et $P_2(z_2)$ et tel que le point $P_3\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ appartiennent à la médiatrice de $[P_0P_2]$.

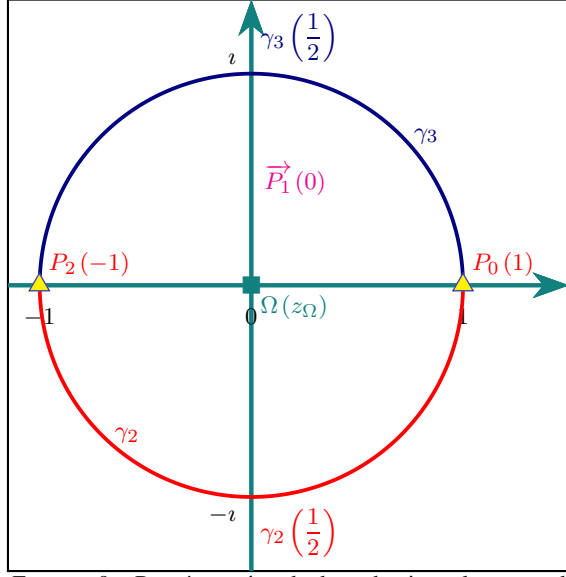


FIGURE 9 – Représentation de deux demi-cercles ayant des points extrémaux stationnaires par deux courbes de Bézier rationnelles quadratiques à points complexes massiques de contrôle.

Démonstration : Connaissant le centre z_Ω du cercle, d'après la formule (24), nous avons :

$$\omega_2 = \lambda \left(\frac{z_0 + z_2 - 2z_\Omega}{z_0 - z_2} i + i \right) = \lambda(1 + i)$$

d'où :

$$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{z_0 + \lambda(1+i)z_2}{1 + \lambda(1+i)}$$

Posons :

$$z_I = \frac{z_2 + z_0}{2}$$

Nous avons :

$$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_I = \frac{(z_2 - z_0)((1+i)\lambda - 1)}{2(1 + \lambda(1+i))}$$

et :

$$\begin{aligned} & \overline{\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_I(z_0 - z_2) + z_0 - z_2} \left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_I \right) \\ &= -\frac{(z_2 - z_0)^2 (2\lambda^2 - 1)}{2\lambda^2 + 2\lambda + 1} \end{aligned}$$

Le point $P_3\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ appartient à la médiatrice de $[P_0P_2]$ ssi :

$$\overline{\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_\Omega(z_0 - z_2) + z_0 - z_2} \left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_\Omega \right) = 0$$

ssi :

$$-\frac{(z_2 - z_0)^2 (2\lambda^2 - 1)}{2\lambda^2 + 2\lambda + 1} = 0$$

$$\text{ssi } \lambda \in \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Il reste à déterminer λ pour que $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ soit sur le petit arc de cercle. Prenons $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nous avons :

$$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-i\sqrt{2} + 1 + i)m_0 + (i\sqrt{2} + 1 - i)m_2}{2}$$

et :

$$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_I = i \frac{(1 - \sqrt{2})(m_0 - m_2)}{2}$$

En fonction de ω_2 , nous avons :

$$z_\Omega = \frac{(1+i)m_0 + (1-i)m_2}{2}$$

et :

$$z_I - z_\Omega = i \frac{m_2 - m_0}{2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \overline{\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_I} \left(i \frac{m_2 - m_0}{2} \right) \\ &+ \left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - z_I \right) i \frac{m_2 - m_0}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2} |m_2 - m_0|^2 > 0 \end{aligned}$$

■

Notons qu'un prenant $\tilde{z}_2 = z_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\kappa$, la courbe γ est le trois quart de cercle d'extrémités P_0 et P_2 .

Corollaire 3 (: Modélisation d'un quart de cercle régulier avec deux points extrémaux stationnaires)

Soit $\Omega(z_\Omega)$ le centre du cercle \mathcal{C} de rayon ρ .

Soit $P_0(z_0)$ et $P_2(z_2)$ deux points de \mathcal{C} vérifiant et z_Ω trois complexes distincts vérifiant :

$$(\Omega P_0) \perp (\Omega P_2)$$

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\kappa$.

Alors la courbe γ est un quart de cercle du cercle symétrique de \mathcal{C} par rapport à la droite (P_0P_2) et tel que le point $P_3\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ appartiennent à la médiatrice de $[P_0P_2]$.

Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème 10 au théorème 13.

■

La figure 10 illustre le théorème 13 et le corollaire 3 où :

— la courbe γ_0 (resp. γ_1) est une courbe de Bézier rationnelle à points complexes massiques de contrôle

- $\tilde{z}_0 = 1 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = \iota + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \iota)\kappa$
 (resp. $\tilde{z}_2 = \iota - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \iota)\kappa$);
 — la courbe γ_1 (resp. γ_2) est une courbe de Bézier rationnelle à points complexes massiques de contrôle
 $\tilde{z}_0 = 1 + 1\kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = \iota + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \iota)\kappa$
 (resp. $\tilde{z}_2 = \iota - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \iota)\kappa$).

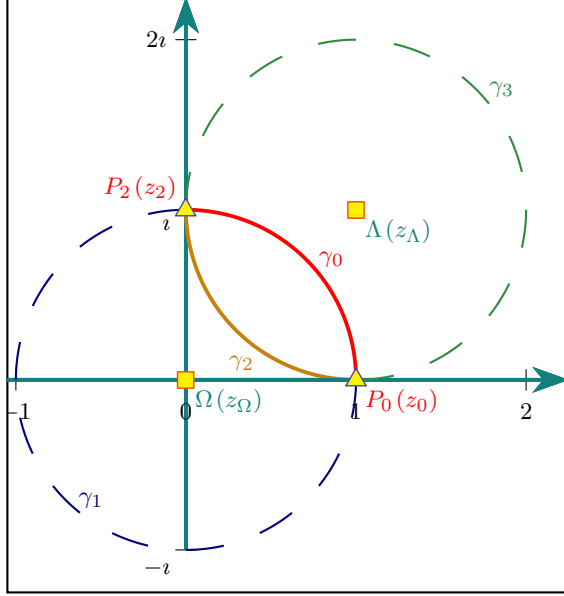


FIGURE 10 – Représentation d'un quart et d'un trois-quart de cercles ayant des points extrémaux stationnaires par deux courbes de Bézier rationnelles quadratiques à points complexes massiques de contrôle.

5.2.3. Arc régulier quelconque

Il reste à déterminer le module « idéal » c'est-à-dire imposer que $\gamma(\frac{1}{2})$ soit sur la médiatrice du segment délimité par les images z_0 et z_2 .

Théorème 14 (: Double arc de cercle à points stationnaires)

Soit $P_0(z_0)$ et $P_2(z_2)$ deux points d'un cercle \mathbb{C} de centre $\Omega(z_\Omega)$ vérifiant :

$$z_\Omega \neq \frac{z_0 + z_2}{2} = z_I$$

Soit $\tilde{z}_0 = z_0 + \kappa$, $\tilde{z}_1 = 0 + 0\kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \omega_2\kappa$ les trois nombres complexes massiques de contrôle de la courbe de Bézier γ .

Soit

$$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = z_3 = \frac{z_0 + \omega_2 z_2}{1 + \omega_2}$$

Alors :

- les points P_0 et P_2 sont deux points stationnaires et de rebroussement du cercle \mathbb{C} ;
- le point $z_3 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ appartient à la médiatrice du segment $[P_0 P_2]$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} \overline{z_3 - z_I}(z_0 - z_2) + \\ (z_3 - z_I)\overline{z_0 - z_2} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

En posant :

$$\varpi_2 = \frac{z_0 + z_2 - 2z_\Omega}{z_0 - z_2} \iota + \iota$$

nous avons :

$$\omega_2 = \lambda \varpi_2$$

et l'équation (26) devient :

$$\begin{aligned} \frac{z_0 + \lambda \varpi_2 z_2}{1 + \lambda \varpi_2} - z_I(z_0 - z_2) + \\ \left(\frac{z_0 + \lambda \varpi_2 z_2}{1 + \lambda \varpi_2} - z_I \right) \overline{z_0 - z_2} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne deux solutions λ_1 et λ_2 ;

- le point $z_3 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ appartient au petit arc de cercle si et seulement si :

$$\begin{aligned} \frac{z_0 + \lambda \varpi_2 z_2}{1 + \lambda \varpi_2} - z_I(z_I - z_\Omega) + \\ \left(\frac{z_0 + \lambda \varpi_2 z_2}{1 + \lambda \varpi_2} - z_I \right) \overline{z_I - z_\Omega} > 0 \end{aligned}$$

Démonstration :

Commençons par les lemmes suivants :

Lemme 1 (: Produit scalaire [GB17a])

Soit $\vec{u}_0(z_0)$ et $\vec{u}_1(z_1)$. Alors :

$$\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_1 = \frac{\overline{z_0} z_1 + z_0 \overline{z_1}}{2}$$

Lemme 2 (: Déterminant [GB17a])

Soit $\vec{u}_0(z_0)$ et $\vec{u}_1(z_1)$. Alors :

$$\det(\vec{u}_0; \vec{u}_1) = \frac{\overline{z_0} z_1 - z_0 \overline{z_1}}{2}$$

L'expression de la courbe de Bézier est :

$$\gamma(t) = \frac{(1-t)^2 z_0 + \omega_2 t^2 z_2}{(1-t)^2 + \omega_2 t^2}$$

d'où :

$$z_3 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{z_0 + \omega_2 z_2}{1 + \omega_2}$$

Soit $\vec{u}_0(z_0 - z_2)$ et $\vec{u}_1\left(z_3 - \frac{z_0 + z_2}{2}\right)$.

$$z_3 - \frac{z_0 + z_2}{2} = \frac{z_0 + \omega_2 z_2}{1 + \omega_2} - \frac{z_0 + z_2}{2}$$

Ainsi, $z_3 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est sur la médiatrice du segment délimité par z_0 et z_2 si et seulement si :

$$\frac{\frac{z_0 + \omega_2 z_2}{1 + \omega_2} - \frac{z_0 + z_2}{2}}{z_0 - z_2} (z_0 - z_2) + \left(\frac{z_0 + \omega_2 z_2}{1 + \omega_2} - \frac{z_0 + z_2}{2}\right) \overline{z_0 - z_2} = 0$$

En posant :

$$\varpi_2 = \frac{z_0 + z_2 - 2z_\Omega}{z_0 - z_2} \iota + \iota$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \lambda \varpi_2 \\ \frac{\frac{z_0 + \lambda \varpi_2 z_2}{1 + \lambda \varpi_2} - \frac{z_0 + z_2}{2}}{z_0 - z_2} (z_0 - z_2) + \left(\frac{z_0 + \lambda \varpi_2 z_2}{1 + \lambda \varpi_2} - \frac{z_0 + z_2}{2}\right) \overline{z_0 - z_2} &= 0 \end{aligned}$$

Il suffit, selon la valeur de λ si les vecteurs d'affixes $z_3 - \frac{z_0 + z_2}{2}$ et $\frac{z_0 + z_2}{2} - z_\Omega$ sont de même sens ou non. Si la réponse est oui, le point d'affixe z_3 appartient au petit arc de cercle.

■

5.3. Un seul point extrémal stationnaire

Le théorème 15 permet de modéliser un arc de cercle avec une extrémité stationnaire :

Théorème 15 (: Modélisation d'un arc de cercle avec un seul point stationnaire)

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + \kappa$, $\tilde{z}_1 = z_0 + \omega_1 \kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \omega_2 \kappa$ vérifiant $z_0 \neq z_2$.

La courbe γ est un arc de cercle ssi $\omega_1 \in \mathbf{R}^*$ et $\omega_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ et le centre Ω du cercle a pour affixe :

$$z_\Omega = \frac{z_0 + z_2}{2} + \frac{1}{\tan(\arg \omega_2)} \iota \frac{z_0 - z_2}{2} \quad (27)$$

Démonstration :

Soit

$$z_3 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2\omega_1 + 1)z_0 + \omega_2 z_2}{\omega_2 + 2\omega_1 + 1}$$

Pour $t \in \mathbf{R} - \{0; 1; \frac{1}{2}\}$, nous allons montrer que le bi-rapport :

$$[z_0; z_2, z_3; \gamma(t)] = \frac{(z_0 - z_2)(z_3 - \gamma(t))}{(z_0 - \gamma(t))(z_3 - z_2)}$$

est un nombre réel. Nous avons :

$$\begin{aligned} z_3 - \gamma(t) &= \frac{(z_0 - z_2)\omega_2(2t - 1)(2\omega_1 t + 1)}{(\omega_2 + 2\omega_1 + 1)((\omega_2 - 2\omega_1 + 1)t^2 + 2t(\omega_1 - 1) + 1)} \end{aligned}$$

et :

$$z_0 - \gamma(t) = \frac{t^2(z_0 - z_2)\omega_2}{(\omega_2 - 2\omega_1 + 1)t^2 + 2t(\omega_1 - 1) + 1}$$

et :

$$z_3 - z_2 = \frac{(2\omega_1 + 1)(z_0 - z_2)}{\omega_2 + 2\omega_1 + 1}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &[z_0; z_2, z_3; \gamma(t)] \\ &= \frac{(z_0 - z_2)(z_3 - \gamma(t))}{(z_0 - \gamma(t))(z_3 - z_2)} \\ &= \frac{(z_0 - z_2)(z_0 - z_2)\omega_2(2t - 1)(2\omega_1 t + 1)}{(\omega_2 + 2\omega_1 + 1)((\omega_2 - 2\omega_1 + 1)t^2 + 2t(\omega_1 - 1) + 1)} \\ &= \frac{(t^2(z_0 - z_2)\omega_2)(2\omega_1 + 1)(z_0 - z_2)}{((\omega_2 - 2\omega_1 + 1)t^2 + 2t(\omega_1 - 1) + 1)(\omega_2 + 2\omega_1 + 1)} \\ &= \frac{(2t - 1)(2\omega_1 t + 1)}{1} \\ &= \frac{t^2(2\omega_1 + 1)}{1} \\ &= \frac{(2t - 1)(2\omega_1 t + 1)}{(2\omega_1 + 1)t^2} \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\forall t \in \mathbf{R} - \left\{0; 1; \frac{1}{2}\right\}, [z_0; z_2, z_3; \gamma(t)] \in \mathbf{R} \iff \text{Im}(\omega_1) = 0$$

ce qui induit que les points d'affixes z_0 , z_2 , $z_3 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\gamma(t)$ sont cocycliques ou alignés. Il reste à déterminer le centre $\Omega(z_\Omega)$ du cercle avec :

$$z_\Omega = \frac{z_0 + z_2}{2} + k \iota \frac{z_0 - z_2}{2}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{P_2\Omega}(z_\Omega - z_2)$ et $\overrightarrow{\gamma'(1)}\left(-n\frac{\omega_1}{\omega_2}(z_0 - z_2)\right)$

sont orthogonaux[†] où :

$$z_\Omega - z_2 = \frac{z_0 - z_2}{2}(1 + k \iota)$$

et il suffit d'imposer que :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_\Omega - z_2}{-n\frac{\omega_1}{\omega_2}(z_0 - z_2)}\right) &\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \\ \arg\left(\frac{z_\Omega - z_2}{-n\frac{\omega_1}{\omega_2}(z_0 - z_2)}\right) &\equiv \arg\left(\frac{\frac{z_0 - z_2}{2}(1 + k \iota)}{\frac{1}{\omega_2}(z_0 - z_2)}\right) \quad [\pi] \\ &\equiv \arg(\omega_2(1 + k \iota)) \quad [\pi] \\ &\equiv \arg(\omega_2) + \arg(1 + k \iota) \quad [\pi] \end{aligned}$$

[†]. $z_1 = z_0$

ce qui implique :

$$\arg(1 + k\iota) \equiv \frac{\pi}{2} - \arg(\omega_2) \quad [\pi]$$

d'où :

$$k = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arg(\omega_2)\right) = \frac{1}{\tan(\arg \omega_2)}$$

■

Nous avons deux degrés de liberté : le réel ω_1 et $|\omega_2|$. Afin d'assurer les jointures G^1-C^1 entre lettres, nous utilisons ω_1 afin que le vecteur vitesse au point non stationnaire soit unitaire.

Théorème 16 (: Détermination de ω_1 pour une jointure G^1-C^1 entre lettres)

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + \kappa$, $\tilde{z}_1 = z_0 + \omega_1 \kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \omega_2 \kappa$ vérifiant $z_0 \neq z_2$, $\omega_1 \in \mathbf{R}^*$ et $\omega_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$.

Si :

$$\omega_1 = \frac{|\omega_2|}{2|z_2 - z_0|} \quad (28)$$

alors le vecteur vitesse au point $\gamma(1)$ est unitaire.

Démonstration : L'affixe de $\frac{d\gamma}{dt}(1)$ est :

$$2\frac{\omega_1}{\omega_2}(z_2 - z_1) = 2\frac{\omega_1}{\omega_2}(z_2 - z_0)$$

d'où :

$$\omega_1 = \frac{|\omega_2|}{2|z_2 - z_0|} \Rightarrow \left\| \frac{d\gamma}{dt}(1) \right\| = 1$$

■

Le module de ω_2 permet soit d'obtenir un arc régulier, soit de contrôler l'accélération en l'un des points extrémaux.

Théorème 17 (: Détermination de ω_2 pour une jointure G^1-C^1 régulière entre lettres)

Soit $\omega_2 = \rho_2 e^{i\theta_2} \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ et :

$$\omega_1 = \frac{\rho_2}{2|z_2 - z_0|}$$

Soit γ une courbe de Bézier quadratique de points complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = z_0 + \kappa$, $\tilde{z}_1 = z_0 + \omega_1 \kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \omega_2 \kappa$ vérifiant $z_0 \neq z_2$. Posons :

$$d_2 = \frac{1}{|z_2 - z_0|}$$

et :

$$U_1 = z_0 - z_2$$

Soit :

$$\begin{cases} a_0 &= d_2 z_0 + e^{i\theta_2} z_2 - z_I (e^{i\theta_2} + d_2) \\ b_0 &= \overline{a_0} (e^{i\theta_2} + d_2) U_1 \\ &+ a_0 (e^{-i\theta_2} + d_2) \overline{U_1} \\ c_0 &= (\overline{a_0} + \overline{z_0 - z_I} (e^{i\theta_2} + d_2)) U_1 \\ &+ (a_0 + (e^{-i\theta_2} + d_2) (z_0 - z_I)) \overline{U_1} \\ d_0 &= \overline{z_0 - z_I} U_1 + (z_0 - z_I) \overline{U_1} \end{cases}$$

Le nombre ρ_2 est solution de l'équation :

$$b_0 x^2 + c_0 x + d_0 = 0$$

et le petit arc de cercle est obtenu avec la solution de l'inéquation :

$$\frac{\rho_2 a_0 + z_0 - z_I}{\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1} (z_I - z_C) > 0$$

où z_C est le centre du cercle, formule (27).

Démonstration : Soit :

$$\begin{aligned} z_3 &= \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2\omega_1 + 1)z_0 + \omega_2 z_2}{\omega_2 + 2\omega_1 + 1} \\ &= \frac{(\rho_2 d_2 + 1)z_0 + \rho_2 e^{i\theta_2} z_2}{\rho_2 e^{i\theta_2} + \rho_2 d_2 + 1} \\ &= \frac{\rho_2 (d_2 z_0 + e^{i\theta_2} z_2) + z_0}{\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1} \end{aligned}$$

Soit :

$$z_I = \frac{z_0 + z_2}{2}$$

Posons :

$$\begin{aligned} U_0 &= z_3 - z_I \\ &= \frac{\rho_2 (d_2 z_0 + e^{i\theta_2} z_2) + z_0}{\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1} - z_I \\ &= \frac{\rho_2 (d_2 z_0 + e^{i\theta_2} z_2) + z_0 - z_I (\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1)}{\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1} \\ &= \frac{\rho_2 (d_2 z_0 + e^{i\theta_2} z_2 - z_I (e^{i\theta_2} + d_2)) + z_0 - z_I}{\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1} \\ &= \frac{\rho_2 a_0 + z_0 - z_I}{\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1} \end{aligned}$$

avec :

$$a_0 = d_2 z_0 + e^{i\theta_2} z_2 - z_I (e^{i\theta_2} + d_2)$$

Ainsi :

$$\overline{U_0} = \frac{\rho_2 \overline{a_0} + \overline{z_0 - z_I}}{\rho_2 (e^{-i\theta_2} + d_2) + 1}$$

Nous avons :

$$\overline{U_1} = \overline{z_0} - \overline{z_2}$$

Nous cherchons ρ_2 tel que :

$$\begin{aligned} & \overline{U_0} U_1 + U_0 \overline{U_1} = 0 \\ & \overline{U_0} U_1 + U_0 \overline{U_1} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\rho_2 \overline{a_0} + \overline{z_0 - z_I}}{\rho_2 (e^{-i\theta_2} + d_2) + 1} \right) U_1 \\ & + \frac{\rho_2 a_0 + z_0 - z_I}{\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1} \overline{U_1} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(\rho_2 \overline{a_0} + \overline{z_0 - z_I}) (\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1) U_1}{(\rho_2 (e^{-i\theta_2} + d_2) + 1) (\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1)} \\ & + \frac{(\rho_2 (e^{-i\theta_2} + d_2) + 1) (\rho_2 a_0 + z_0 - z_I) \overline{U_1}}{(\rho_2 (e^{-i\theta_2} + d_2) + 1) (\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1)} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\rho_2 \overline{a_0} + \overline{z_0 - z_I}) (\rho_2 (e^{i\theta_2} + d_2) + 1) U_1 \\ & + (\rho_2 (e^{-i\theta_2} + d_2) + 1) (\rho_2 a_0 + z_0 - z_I) \overline{U_1} = 0 \\ \Leftrightarrow & b_0 \rho_2^2 + c_0 \rho_2 + d_0 = 0 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} b_0 &= \overline{a_0} (e^{i\theta_2} + d_2) U_1 + a_0 (e^{-i\theta_2} + d_2) \overline{U_1} \\ c_0 &= (\overline{a_0} + \overline{z_0 - z_I} (e^{i\theta_2} + d_2)) U_1 \\ &+ (a_0 + (e^{-i\theta_2} + d_2) (z_0 - z_I)) \overline{U_1} \\ d_0 &= \overline{z_0 - z_I} U_1 + (z_0 - z_I) \overline{U_1} \end{cases}$$

Il reste à déterminer la solution ρ_{2a} permettant d'obtenir le petit arc de cercle. Soit z_Ω le centre du cercle. La solution ρ_{2a} vérifie l'inéquation :

$$\frac{\rho_{2a} a_0 + z_0 - z_I}{\rho_{2a} (e^{i\theta_2} + d_2) + 1} (z_I - z_C) > 0$$

■

Comme exemple, prenons $z_0 = z_1 = 1$, $z_2 = i$ et $\arg \omega_2 = \frac{\pi}{4}$. Nous avons :

$$z_I = \frac{1+i}{2}$$

et :

$$d_2 = \frac{1}{|z_0 - z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'où :

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \rho_2$$

Nous avons :

$$z_3 = \gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} + i \rho_2}{\sqrt{2} + (2+i) \rho_2}$$

d'où :

$$\begin{cases} a_0 &= -\frac{\sqrt{2}}{4} (1+i) \\ b_0 &= -1 \\ c_0 &= 2\sqrt{2} \\ d_0 &= 2 \end{cases}$$

et l'équation à résoudre est :

$$-x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$$

et les solutions sont :

$$\begin{cases} \rho_{2a} &= \sqrt{2} + 2 \\ \rho_{2b} &= \sqrt{2} - 2 \end{cases}$$

Le centre du cercle est :

$$z_C = 1 + i$$

et pour ρ_{2a} , nous avons :

$$\frac{\rho_{2a} a_0 + z_0 - z_I}{\rho_{2a} (e^{i\theta_2} + d_2) + 1} (z_I - z_C) = \sqrt{2} - 1 > 0$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \omega_1 &= \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ \omega_2 &= (1+\sqrt{2})(1+i) \end{cases}$$

et :

$$z_3 = \gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

et nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dt}(0) \\ \frac{d\gamma}{dt}(1)(i) \end{cases}$$

et la norme du vecteur vitesse en $P_2(z_2)$ est 1. Le second point stationnaire est z_4 d'affixe :

$$z_4 = \frac{35+24\sqrt{2}}{219} + i32\frac{9+2\sqrt{2}}{219} \simeq 0,315 + 1,728i$$

La figure 11 illustre les courbes γ_1 (resp. γ_2) de points

complexes massiques de contrôle $\tilde{z}_0 = 1 + \kappa$, $\tilde{z}_1 = 1 + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\kappa$ et $\tilde{z}_2 = i + (1 + \sqrt{2})(1+i)\kappa$ (resp. $\tilde{z}_2 = i - (1 + \sqrt{2})(1+i)\kappa$). L'afixe de $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est :

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{2}(1+i) \simeq 0,293 + 0,293i$$

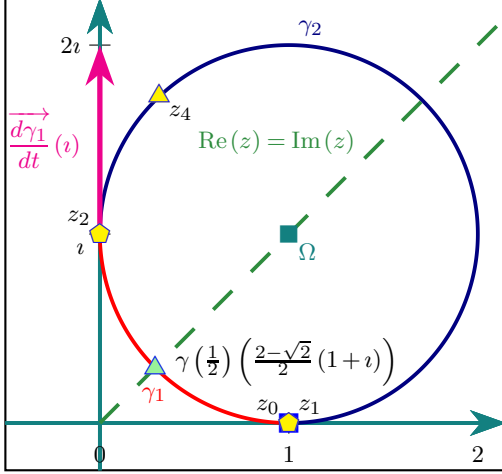


FIGURE 11 – Courbes de Bézier quadratique avec un seul point extrémal stationnaire d'afixe z_0 . Le point d'afixe z_1 n'est pas un point de la courbe.

Malheureusement, les deux contraintes (vecteur tangent unitaire, parcours régulier) sont incompatibles, figure 12. illustre les courbes γ de points complexes massiques de contrôle :

$$\begin{cases} \tilde{z}_0 &= \frac{1}{2}i + 1\kappa \\ \tilde{z}_1 &= \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{2}\kappa \\ \tilde{z}_2 &= \frac{1}{2} + \frac{2 - \sqrt{2}}{2}(1 - i)\kappa \end{cases}$$

et l'afixe du centre du cercle est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Les points de rebroussement sont z_0 et $z_4\left(\frac{2}{3} + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}i\right)$ et l'afixe de $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est :

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{4}(1+i) \simeq 0,146 + 0,146i$$

et la courbe passe deux fois par le point $M_2(z_2)$ et le vecteur tangent en $t = 1$ a pour afixe -1 au lieu de 1. Lorsque le rayon du cercle est petit, le vecteur vitesse « naturel » a une norme trop petite et pour augmenter cette dernière, nous devons nous déplacer très lentement entre z_0 et $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ puis accélérer pour passer de $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ à z_2 . C'est le phénomène inverse lorsque le rayon du cercle est trop grand.

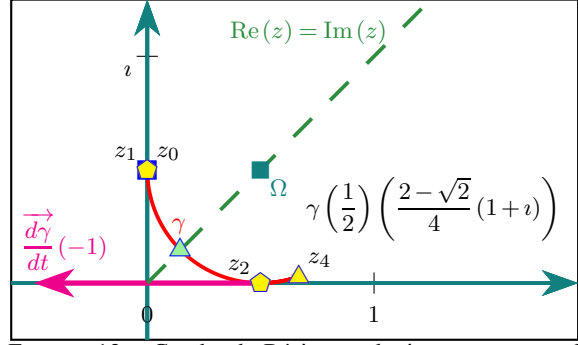


FIGURE 12 – Courbe de Bézier quadratique avec un seul point extrémal stationnaire d'afixe z_0 et passant deux fois par le point d'afixe z_2 . Le point d'afixe z_1 n'est pas un point de la courbe.

Les solutions de l'équation :

$$\text{Im}(\gamma(t)) = \text{Im}(z_2)$$

sont 1 et $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$. Les solutions sont :

- Modifier le théorème 17 ;
- Faire un changement de paramètre homographique envoyant $[0; 1]$ sur $\left[0; \frac{3+\sqrt{2}}{7}\right]$;
- Partir de la figure 11 et prendre l'image de la courbe de Bézier par une similitude directe puis faire le changement de paramètre homographique idoine, paragraphe 6.1.2.2.

6. Modélisation de lettres

Nous modélisons les lettres a , c , d et q .

La première lettre de l'alphabet est modélisée par :

1. un arc de cercle γ_M pour l'accroche initiale en bas ;
2. un arc de cercle γ_N , de centre $z_\Omega = \frac{1}{2}i$ et de rayon $\rho = \frac{1}{2}$;
3. un segment γ_P ;
4. un arc de cercle γ_Q pour l'accroche finale, figure 13.

6.1. La lettre a

6.1.1. Modélisation du support

Les points complexes massiques de contrôle de la courbe :

1. γ_M sont $\tilde{m}_0 = -\frac{1+\sqrt{3}}{4} + 1\kappa$, $\tilde{m}_1 = \text{Re}\left(z_\Omega + \rho e^{i\frac{7\pi}{6}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa = \text{Re}(z_\Omega) + \rho \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa$ et $\tilde{m}_2 = z_\Omega + \rho e^{i\frac{7\pi}{6}} + 1\kappa$;

2. γ_N , sont $\tilde{n}_0 = z_\Omega + \rho e^{i\frac{\pi}{4}} + 1\kappa$, $\tilde{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i + 0\kappa$
et $\tilde{n}_2 = z_\Omega + \rho e^{-i\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa$;
3. γ_P sont $\tilde{p}_0 = z_\Omega + \rho \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1\kappa$ et $\tilde{p}_1 = z_\Omega + \rho e^{-i\frac{\pi}{4}} + 1\kappa$;
4. γ_Q sont $\tilde{q}_0 = z_\Omega + \rho e^{-i\frac{\pi}{4}} + 1\kappa$, $\tilde{q}_1 = \text{Re}\left(z_\Omega + \rho e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa = \rho \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa$ et $\tilde{q}_2 = \frac{1}{2} + 1\kappa$.

La figure 13 illustre les courbes pour le support de la lettre α de l'alphabet.

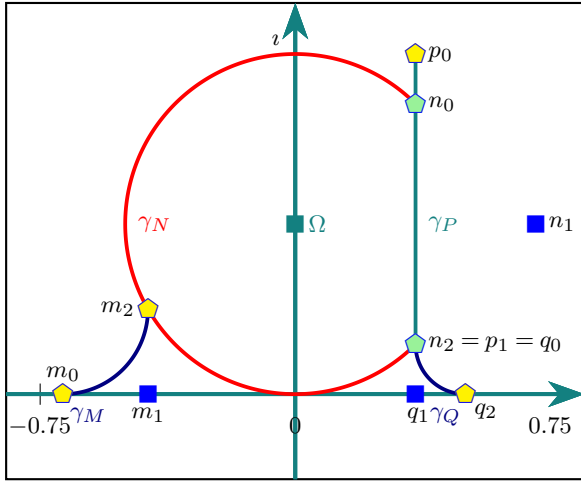


FIGURE 13 – Courbes de Bézier pour le support de la première lettre de l'alphabet.

6.1.2. Cinématique de la courbe γ_M

Nous devons distinguer les cas où la lettre est en début de mot et le cas contraire. L'affixe du centre Ω_0 du cercle γ_M est :

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{1+\sqrt{3}}{4} + i \text{Im}\left(z_\Omega + \rho e^{i\frac{7\pi}{6}}\right) \\ &= -\frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4} \end{aligned}$$

6.1.2.1. La lettre en début de mot

Les extrémités sont deux points stationnaires. En utilisant le théorème 8, les points massiques de contrôle sont :

$$\begin{cases} \tilde{m}_0 &= -\frac{1+\sqrt{3}}{4} + 1\kappa \\ \tilde{m}_1 &= 0 + 0\kappa \\ \tilde{m}_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\kappa \end{cases}$$

6.1.2.2. La lettre n'est pas en début de mot

Le vecteur vitesse en $M_0(m_0)$ est unitaire tandis que le point $M_2(m_2)$ est stationnaire et nous sommes dans le cas où le théorème 17 ne s'applique pas, nous obtenons une construction analogue à celle de la figure 12. Comme solution, nous partons de la courbe γ_1 de la figure 11 et utilisons la similitude directe d'expression :

$$s(z) = az + b$$

Les valeurs de a et b se déterminent par la résolution du système :

$$\begin{cases} s(z_0) &= m_2 \\ s(z_2) &= m_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} az_0 + b &= m_2 \\ az_2 + b &= m_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} az_0 + b &= m_2 \\ a(z_2 - z_0) &= m_0 - m_2 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} az_0 + b &= m_2 \\ a &= \frac{m_0 - m_2}{z_2 - z_0} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} b &= m_2 - \frac{m_0 - m_2}{z_2 - z_0} z_0 \\ a &= \frac{m_0 - m_2}{z_2 - z_0} \end{cases}$$

Soit $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $\omega_2 = (1+\sqrt{2})(1+i)$. Nous avons $\tilde{z}_0 = 1 + \omega_0\kappa$, $\tilde{z}_1 = 1 + \omega_1\kappa$ et $\tilde{z}_2 = i + \omega_2\kappa$ d'où :

$$\begin{cases} m_0 &= s(z_2) &= -\frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ m_1 &= s(z_1) &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \\ m_2 &= s(z_0) &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \tilde{m}_0 &= s(z_2) + \omega_2\kappa \\ \tilde{m}_1 &= s(z_1) + \omega_1\kappa \\ \tilde{m}_2 &= s(z_0) + \omega_0\kappa \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \widetilde{m}_0 &= -\frac{1+\sqrt{3}}{4} + (1+\sqrt{2})(1+i)\kappa \\ \widetilde{m}_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\kappa \\ \widetilde{m}_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + 1\kappa \end{cases}$$

Soit γ_M la courbe de Bézier de points complexes massiques de contrôle $\widetilde{m}_0, \widetilde{m}_1$ et \widetilde{m}_2 . Nous avons :

$$\begin{aligned} \overline{m_0 - \gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(m_0 - \gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \\ \overline{m_2 - \gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(m_2 - \gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{16} \end{aligned}$$

d'une part,

$$\left\| \frac{\overrightarrow{d\gamma}}{dt}(1) \right\| = 0$$

d'autre part, mais :

$$\left\| \frac{\overrightarrow{d\gamma}}{dt}(0) \right\| = \frac{1}{4} = |a| = \left| \frac{m_0 - m_2}{z_2 - z_0} \right|$$

et le vecteur $\frac{\overrightarrow{d\gamma}}{dt}(0)$ n'est pas unitaire. Pour remédier à ce problème, nous faisons un changement de paramètre homographique h tel que :

$$\begin{cases} h(0) &= 0 \\ h(1) &= 1 \\ h'(0) &= \frac{1}{\left\| \frac{\overrightarrow{d\gamma}}{dt}(0) \right\|} \end{cases} \quad (29)$$

Comme :

$$h(u) = \frac{a(1-u) + bu}{c(1-u) + du}$$

nous avons $a = 0$ et $d = b$. Sans perte de généralité, nous prenons $c = 1$ d'où :

$$h(u) = \frac{bu}{(1-u) + bu}$$

et :

$$h'(u) = \frac{b}{((1-u) + bu)^2}$$

d'où :

$$h'(u) = b$$

et, via la formule (29), nous avons :

$$b = 4$$

et les nouveaux complexes massiques de contrôle de la courbe de Bézier γ_N sont :

$$\begin{cases} \widetilde{m}_0 &= -\frac{1+\sqrt{3}}{4} + (1+\sqrt{2})(1+i)\kappa \\ \widetilde{m}_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + 2(1+\sqrt{2})\kappa \\ \widetilde{m}_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + 16\kappa \end{cases}$$

et nous avons :

$$\left\| \frac{\overrightarrow{d\gamma_N}}{dt}(0) \right\| = 1$$

mais l'affixe de $\gamma_N\left(\frac{1}{2}\right)$ est :

$$\begin{aligned} &\frac{18677088\sqrt{2} + 37837012}{1485100369} + \\ &i \frac{198935232\sqrt{2} + 89433328}{1485100369} \simeq \\ &0,043 + 0,250i \end{aligned}$$

et :

$$\begin{cases} (\gamma_N\left(\frac{1}{2}\right) - m_0) \overline{\gamma_N\left(\frac{1}{2}\right) - m_0} &\simeq 0,590 \\ (\gamma_N\left(\frac{1}{2}\right) - m_2) \overline{\gamma_N\left(\frac{1}{2}\right) - m_2} &\simeq 0,227 \end{cases}$$

6.1.3. Cinématique de la courbe γ_N

Soit $z_\Omega = \frac{1}{2}i$. Les extrémités sont deux points stationnaires du cercle de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de rayon $\rho_1 = \frac{1}{2}$. En utilisant la formule (24), nous avons $\widetilde{n}_1 = 0 + 0\kappa$ et :

$$\widetilde{n}_0 = z_\Omega + \rho_1 e^{i\frac{\pi}{4}} + 1\kappa = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4}i + 1\kappa$$

et :

$$\begin{aligned} \widetilde{n}_2 &= z_\Omega + \rho_1 e^{i\frac{\pi}{4}} + \lambda \left(\frac{z_0 + z_2 - 2z_\Omega}{z_0 - z_2} i + i \right) \kappa \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4}i + \lambda(1+i)\kappa \end{aligned}$$

Il reste à déterminer λ pour que le point d'affixe $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ appartienne à la médiatrice du segment $[N_0(n_0)N_2(n_2)]$. Pour ce faire, en utilisant le théorème 14, nous avons :

$$n_I = \frac{z_0 + z_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}i$$

d'un part et :

$$n_3 = \frac{z_0 + \lambda(1+i)z_2}{1 + \lambda(1+i)}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} n_3 - n_I &= \frac{1}{-2\sqrt{2}} \frac{\lambda(-1+i) - i}{\lambda(1+i) + 1} \\ &= \frac{1}{-2\sqrt{2}} \frac{-\lambda + (\lambda-1)i}{\lambda + 1 + \lambda i} \end{aligned}$$

d'où :

$$\overline{n_3 - n_I} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} \frac{-\lambda - (\lambda - 1)\iota}{\lambda + 1 - \lambda\iota}$$

De plus :

$$n_0 - n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\iota$$

et :

$$\overline{n_0 - n_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\iota$$

En simplifiant par $\frac{1}{-2\sqrt{2}}$, l'équation (26) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{-\lambda - (\lambda - 1)\iota}{\lambda + 1 - \lambda\iota} \frac{\sqrt{2}}{2}\iota + \\ & \frac{-\lambda + (\lambda - 1)\iota}{\lambda + 1 + \lambda\iota} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\iota \right) = 0 \end{aligned}$$

qui est équivalente à :

$$\frac{-\lambda - (\lambda - 1)\iota}{\lambda + 1 - \lambda\iota} - \frac{-\lambda + (\lambda - 1)\iota}{\lambda + 1 + \lambda\iota} = 0$$

qui est équivalente à :

$$\begin{aligned} & (-\lambda - (\lambda - 1)\iota)(\lambda + 1 + \lambda\iota) - \\ & (-\lambda + (\lambda - 1)\iota)(\lambda + 1 - \lambda\iota) = 0 \end{aligned}$$

qui se simplifie en :

$$-2\lambda^2 + 1 = 0$$

et nous obtenons deux solutions :

$$S_1 = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Il reste à trouver la bonne solution afin que le point d'affixe $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ appartienne au grand arc de cercle.

Les vecteurs d'affixes $n_I - n_3$ et $n_3 - n_\Omega$ doivent être de sens opposé c'est-à-dire :

$$\overline{n_I - n_3}(n_I - n_\Omega) + (n_I - n_3)\overline{n_I - n_\Omega} < 0$$

Supposons que la solution est $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nous avons :

$$n_3 = \frac{1}{2}(1 + \iota)$$

d'où :

$$n_I - n_3 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Or :

$$z_\Omega - n_i = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \overline{n_I - n_3}(n_I - n_\Omega) + \\ & (n_I - n_3)\overline{n_I - n_\Omega} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4} > 0 \end{aligned}$$

donc la solution est $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où :

$$\omega_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \iota)$$

Pour réaliser une jointure $G^1 - C^1$ entre γ_P et γ_Q en q_0 , le point $Q_1(q_1)$ étant fixé, nous déterminons les points de contrôle de la courbe γ_Q puis nous calculons ceux de γ_P .

6.1.4. Cinématique des courbes γ_P et γ_Q

Les affixes des points de contrôle sont :

$$\tilde{q}_0 = n_2 + \mu_0\kappa = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\iota + \mu_0\kappa$$

et :

$$\tilde{q}_1 = \text{Re}(n_2) + \mu_1\kappa = \frac{\sqrt{2}}{4} + \mu_1\kappa$$

et :

$$\tilde{q}_2 = q_1 + |q_0 - q_1| + \mu_2\kappa = \frac{1}{2} + \mu_2\kappa$$

6.1.4.1. La lettre n'est pas en fin de mot L'utilisation d'une courbe de Bézier rationnelle usuelle est possible pour modéliser ce quart de cercle et nous avons $\mu_0 = \mu_2 = 1$ et $\mu_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or :

$$\left\| \frac{d\gamma_Q}{dt}(1) \right\| = 2 \left| \frac{\mu_1}{\mu_2} \right| |z_1 - z_2| = \sqrt{2} - 1$$

et nous imposons que le vecteur tangent $\frac{d\gamma_Q}{dt}(1)$ à γ_Q en $Q_2(q_2)$ soit de norme 1. Nous allons effectuer un changement de paramètre homographique tel que :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

ce qui conduit à $a = 0$ et $d = b$. En prenant $c = 1$, l'expression de h devient :

$$h(u) = \frac{bu}{(1 - u) + bu}$$

et :

$$h'(1) = \frac{1}{b}$$

Nous posons ainsi :

$$b = \sqrt{2} - 1$$

et les nouveaux nombres complexes massiques de contrôle de la courbe γ_Q sont :

$$\begin{cases} \tilde{r}_0 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\iota + 1\kappa \\ \tilde{r}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}\kappa \\ \tilde{r}_2 &= \frac{4-\sqrt{2}}{4} + (\sqrt{2}-1)^2\kappa \end{cases}$$

c'est-à-dire que les poids sont $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}$ et $\nu_2 = (\sqrt{2}-1)^2$.

Il reste à réaliser la jointure G^1 entre γ_P et γ_Q . Nous obtenons :

$$\overrightarrow{\frac{d\gamma_Q}{dt}}(0) \left((-3+2\sqrt{2})\iota \right)$$

d'où :

$$\left\| \overrightarrow{\frac{d\gamma_Q}{dt}}(0) \right\| = 3 - 2\sqrt{2} \simeq 0,1716$$

Il reste à construire la courbe γ_P dont les nombres complexes massiques de contrôle sont :

$$\begin{cases} \tilde{p}_0 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \iota & + & 1\kappa \\ \tilde{p}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \iota & + & \mu_1\kappa \\ \tilde{p}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\iota & + & \mu_2\kappa \end{cases}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\frac{d\gamma_P}{dt}}(1) &= 2\frac{\mu_1}{\mu_2}(p_2 - p_1) \\ &= 2\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4} - 1 \right) \iota \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} - 2 \right) \iota \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2} \right) \iota \\ &= \end{aligned}$$

La condition :

$$\overrightarrow{\frac{d\gamma_P}{dt}}(1) = \overrightarrow{\frac{d\gamma_Q}{dt}}(0)$$

conduit à :

$$2\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{-4-\sqrt{2}}{4} \right) \iota = (-3+2\sqrt{2})\iota$$

et nous obtenons :

$$\mu_2 = 2\mu_1 \frac{4+\sqrt{2}}{4(-3+2\sqrt{2})} = \mu_1 \frac{4+\sqrt{2}}{2(3-2\sqrt{2})}$$

En prenant $\mu_1 = 1$, les nombres complexes massiques de contrôle de γ_P sont :

$$\begin{cases} \tilde{p}_0 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \iota & + & 1\kappa \\ \tilde{p}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \iota & + & 1\kappa \\ \tilde{p}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\iota & + & \frac{4+\sqrt{2}}{2(3-2\sqrt{2})}\kappa \end{cases}$$

6.1.4.2. La lettre est en fin de mot Dans ce cas, seul le point Q_2 est stationnaire. Les affixes des points de contrôle sont : (refaire les calculs, q_0 était faux)

$$\tilde{q}_0 = n_2 + \sigma_0\kappa = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\iota + \sigma_0\kappa$$

et :

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{2} + \sigma_1\kappa$$

et :

$$\tilde{q}_2 = \frac{1}{2} + 1\kappa$$

Le centre du cercle est $\Omega_2(z_{\Omega_2})$ avec :

$$z_{\Omega_2} = \frac{1}{2} + \iota \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

En inversant le sens des nombres complexes massiques de contrôle, en utilisant la formule (28) du théorème (16), nous avons :

$$\begin{cases} z_0 &= q_2 &= & \frac{1}{2} \\ z_1 &= q_1 &= & \frac{1}{2} \\ z_2 &= q_0 &= & \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\iota \end{cases}$$

d'où :

$$d_2 = 2(\sqrt{2}+1)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_0 & = & 1 \\ \sigma_2 & = & \lambda \left(\frac{q_0 + q_2 - 2z_{\Omega_2}}{q_2 - q_0} \iota + \iota \right) \\ & = & \lambda (1 + \iota) \\ & = & \rho_2 e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \sigma_1 & = & \frac{|\sigma_2|}{2|z_0 - z_2|} \\ & = & \rho_2 (\sqrt{2} + 1) \end{array} \right.$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{1}{4} - \iota \frac{\sqrt{2}}{4} \\ b_0 & = & \frac{2\sqrt{2} + 1}{4} \\ c_0 & = & \sqrt{2} - 1 \\ d_0 & = & \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} \end{array} \right.$$

et les deux solutions de l'équation :

$$\frac{2\sqrt{2} + 1}{4}x^2 + (\sqrt{2} - 1)x + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} = 0$$

sont :

$$\left\{ \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7}; 2\sqrt{2} - 3 \right\}$$

et la solution retenue est :

$$\rho_2 = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 1}{7} e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 4}{14} (1 + \iota) \end{aligned}$$

et :

$$\sigma_1 = -\frac{3 + \sqrt{2}}{7}$$

Finalement, les nombres complexes massiques de contrôle de la courbe de Bézier γ_Q sont :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{q}_0 & = & \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \iota + \frac{\sqrt{2} - 4}{14} (1 + \iota) \kappa \\ \tilde{q}_1 & = & \frac{1}{2} + \frac{-3 - \sqrt{2}}{7} \kappa \\ \tilde{q}_2 & = & \frac{1}{2} + 1\kappa \end{array} \right.$$

mais l'un des points de rebroussement est sur le petit arc de cercle entre q_0 et q_2 . Les nombres complexes massiques de contrôle sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{q}_0 & = & \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \iota + \frac{4 - \sqrt{2}}{14} (1 + \iota) \kappa \\ \tilde{q}_1 & = & \frac{1}{2} + \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{7} \kappa \\ \tilde{q}_2 & = & \frac{1}{2} + 1\kappa \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que nous avons changé le signe du poids de q_0 . Mais dans ce cas, Pour $\gamma_Q(0) = q_0$, nous avons :

$$\frac{d\gamma_Q}{dt}(0)(\iota)$$

ce qui ne convient pas. En fait, le point q_0 est un point double obtenu pour $t = 0$ et $t = \frac{10 + 2\sqrt{2}}{23} \simeq 0,558$.

Pour $\gamma_Q(1) = q_2$, nous avons :

$$\frac{d\gamma_Q}{dt}(1)(0)$$

Le second point de rebroussement est obtenu pour $t_3 = \frac{4 + \sqrt{2}}{14}$ a pour affixe :

$$\frac{3 + 7\sqrt{2}}{20} + \frac{11 - 6\sqrt{2}}{20} \simeq 0,645 + 0,126\iota$$

Nous devons effectuer un changement de paramètre homographique pour ne garder que la courbe correspondant à l'intervalle $\left[\frac{10 + 2\sqrt{2}}{23}; 1 \right]$, figure 14.

Nous prenons $c = 1$, $d = b$ d'où :

$$a = \frac{10 + 2\sqrt{2}}{23}$$

et :

$$h : u \mapsto \frac{\frac{10 + 2\sqrt{2}}{23} (1 - u) + bu}{(1 - u) + bu}$$

et nous avons deux choix naturels pour le calcul de b :

- prendre en compte en $\gamma_Q(h(0))$ ou $\gamma_Q(h(1))$;
- imposer que le point d'affixe $\gamma_Q(h(\frac{1}{2}))$ appartient à la médiatrice des points $Q_0(q_0)$ et $Q_2(q_2)$.

Comme la jointure est à l'intérieur d'une lettre, nous privilégions la régularité et résolvons l'équation :

$$\left| \gamma_Q\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right) - q_0 \right| = \left| \gamma_Q\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right) - q_2 \right|$$

et la bonne solution est :

$$b = \frac{\sqrt{5\sqrt{2} + 1} (26 - 4\sqrt{2}) - 35 - 7\sqrt{2}}{161} \simeq 0,080$$

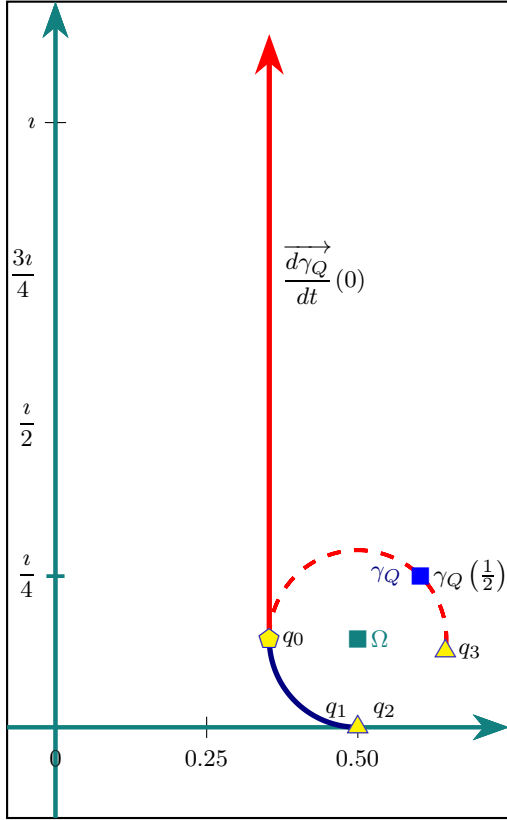


FIGURE 14 – Courbe de Bézier γ_Q sur laquelle un changement de paramètre homographique doit être effectué. _____

Les nouveaux complexes massiques de contrôle de la courbe de Bézier, notée γ_R , sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_0 \\ = \\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i \\ + \\ \frac{116-55\sqrt{2}}{1058}(1+i)\kappa \\ = \\ \frac{1}{2} \\ \tilde{r}_1 \\ + \\ \frac{\sqrt{5\sqrt{2}+1}(6\sqrt{2}+122)-70\sqrt{2}-189}{3703}\kappa \\ \tilde{r}_2 \\ = \\ \frac{1}{2} \\ + \\ \frac{\sqrt{5\sqrt{2}+1}(-12\sqrt{2}-244)+546\sqrt{2}-7}{3703}\kappa \end{array} \right.$$

et :

$$\gamma_3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{4}+i\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right)$$

et :

$$\begin{aligned} \left|\gamma_R\left(\frac{1}{2}\right)-q_0\right| &= \left|\gamma_R\left(\frac{1}{2}\right)-q_2\right| \\ &= \frac{\sqrt{2(10-7\sqrt{2})}}{4} \\ &\simeq 0,112 \end{aligned}$$

et :

$$\frac{d\gamma_R}{dt}(0)\left(\frac{3+2\sqrt{2}-2\sqrt{5\sqrt{2}+1}}{7}i\right)$$

et une valeur approchée de cet affixe est $-0,181i$.

Il reste à construire la courbe γ_P dont les nombres complexes massiques de contrôle sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + i + 1\kappa \\ \tilde{p}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + i + \mu_1\kappa \\ \tilde{p}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + \mu_2\kappa \end{array} \right.$$

L'affixe de $\frac{d\gamma_P}{dt}(1)$ est :

$$2\frac{\mu_1}{\mu_2}(p_2-p_1) = 2\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{4}\right)i$$

La condition :

$$\frac{d\gamma_P}{dt}(1) = \frac{d\gamma_Q}{dt}(0)$$

conduit à :

$$2\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{-4-\sqrt{2}}{4}\right)i = \frac{3+2\sqrt{2}-2\sqrt{5\sqrt{2}+1}}{7}i$$

et nous obtenons :

$$\mu_2 = -\mu_1 \frac{406+203\sqrt{2}}{58\sqrt{2}-116\sqrt{5\sqrt{2}+1}+174}$$

En prenant $\mu_1 = 1$, nous avons $\mu_2 \simeq 9,426$ et les nombres

complexes massiques de contrôle de γ_P sont :

$$\begin{cases} \tilde{p}_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + i & + 1\kappa \\ \tilde{p}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + i & + 1\kappa \\ \tilde{p}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i & - \frac{406+203\sqrt{2}}{58\sqrt{2}-116\sqrt{5\sqrt{2}+1}+174}\kappa \end{cases}$$

La figure 15 illustre les courbes de Bézier rationnelles pour tracer la lettre α de l'alphabet seule.

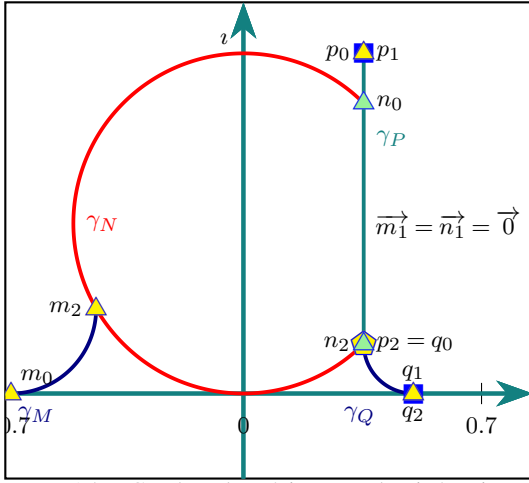


FIGURE 15 – Courbes de Bézier pour la cinématique du tracé de la α de l'alphabet seule. Les points d'affixes n_2 et p_0 sont stationnaires alors que les mêmes, d'affixes p_1 (ce n'est pas un point de la courbe) d'une part et $p_2 = q_0$ d'autre part ne le sont pas.

La figure 16 illustre les courbes de Bézier rationnelles pour tracer la lettre α de l'alphabet seule.

Le tableau 3 regroupe les nombres complexes massiques de contrôle de la courbe γ_N pour la modélisation de la lettre α .

Le tableau 4 regroupe les nombres complexes massiques de contrôle des courbes γ_P et γ_Q pour la modélisation de la lettre α . La courbe γ_P n'a qu'un point stationnaire (\tilde{p}_0) mais ses nombres complexes massiques de contrôle dépendent de la courbe γ_Q .

Le tableau 5 regroupe les nombres complexes massiques de contrôle de la courbe γ_M pour la modélisation de la lettre α .

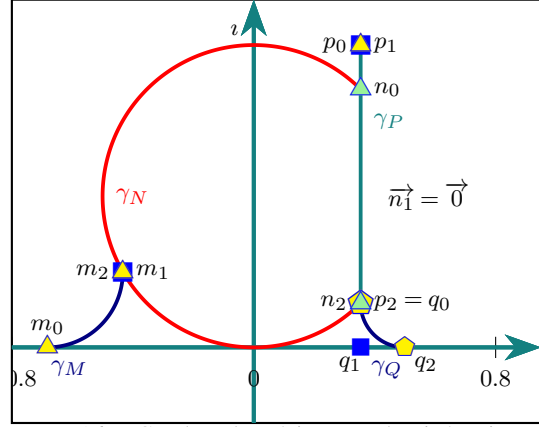


FIGURE 16 – Courbes de Bézier pour la cinématique du tracé de la α de l'alphabet au milieu d'un mot. Les points d'affixes m_2 , n_2 et p_0 sont stationnaires alors que les mêmes, d'affixes m_1 et p_1 (ce n'est pas un point de la courbe) d'une part et $p_2 = q_0$ d'autre part ne le sont pas.

6.2. La lettre d

La seule différence avec la lettre α concerne la courbe γ_P : nous avons :

$$\begin{cases} \tilde{p}_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + 2i & + 1\kappa \\ \tilde{p}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + 2i & + 1\kappa \\ \tilde{p}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i & + \mu_2\kappa \end{cases}$$

et il reste à calculer μ_2 via la relation :

$$\frac{d\gamma_Q}{dt}(0) = \frac{d\gamma_P}{dt}(1) \left(2\frac{\mu_1}{\mu_2}(p_2 - p_1) \right)$$

et nous obtenons :

$$\mu_2 = -\mu_1 \frac{1218 + 203\sqrt{2}}{58\sqrt{2} - 116\sqrt{5\sqrt{2}+1} + 174}$$

En prenant $\mu_1 = 1$, nous avons $\mu_2 \simeq 20,470$ et les nombres complexes massiques de contrôle de γ_P sont :

$$\begin{cases} \tilde{p}_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + i & + 1\kappa \\ \tilde{p}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + i & + 1\kappa \\ \tilde{p}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i & - \frac{1218+203\sqrt{2}}{58\sqrt{2}-116\sqrt{5\sqrt{2}+1}+174}\kappa \end{cases}$$

La figure 17 illustre les courbes de Bézier rationnelles pour tracer la lettre d de l'alphabet seule.

Points	Un seul point stationnaire	Deux points stationnaires
\widetilde{m}_0	$-\frac{1+\sqrt{3}}{4} + (1+\sqrt{2})(1+i)\kappa$	$-\frac{1+\sqrt{3}}{4} + \kappa$
\widetilde{m}_1	$-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + 2(1+\sqrt{2})\kappa$	$0 + 0\kappa$
\widetilde{m}_2	$-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + 16\kappa$	$-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\kappa$

TABLE 3 – Nombres complexes massiques de contrôle des courbes γ_N , γ_P et γ_Q pour la modélisation de la lettre α .

Points	Pas de point stationnaire pour γ_Q	Un seul point stationnaire pour γ_Q
\widetilde{r}_0	$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + 1\kappa$	$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + \frac{116-55\sqrt{2}}{1058}(1+i)\kappa$
\widetilde{r}_1	$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}\kappa$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5\sqrt{2}+1}(6\sqrt{2}+122)-70\sqrt{2}-189}{3703}\kappa$
\widetilde{r}_2	$\frac{4-\sqrt{2}}{4} + (\sqrt{2}-1)^2\kappa$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5\sqrt{2}+1}(-12\sqrt{2}-244)+546\sqrt{2}-7}{3703}\kappa$
\widetilde{p}_0	$\frac{\sqrt{2}}{4} + i + 1\kappa$	$\frac{\sqrt{2}}{4} + i + 1\kappa$
\widetilde{p}_1	$\frac{\sqrt{2}}{4} + i + 1\kappa$	$\frac{\sqrt{2}}{4} + i + 1\kappa$
\widetilde{p}_2	$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}i + \frac{4+\sqrt{2}}{2(3-2\sqrt{2})}\kappa$	$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i - \frac{406+203\sqrt{2}}{58\sqrt{2}-116\sqrt{5\sqrt{2}+1}+174}\kappa$

TABLE 4 – Nombres complexes massiques de contrôle des courbes γ_N , γ_P et γ_Q pour la modélisation de la lettre α .

Points
$\widetilde{n}_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2+\sqrt{2}}{4}i + 1\kappa$
$\widetilde{n}_1 = 0 + 0\kappa$
$\widetilde{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\kappa$

TABLE 5 – Nombres complexes massiques de contrôle de la courbe γ_M pour la modélisation de la lettre α .

6.3. La lettre q

La seule différence avec la lettre α concerne la courbe γ_P , remplacée par un segment et la suppression de la courbe γ_Q .

Les nombres complexes massiques de contrôle de la

courbe γ_P sont :

$$\begin{cases} \widetilde{p}_0 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + i + 1\kappa \\ \widetilde{p}_1 &= 0 + 0\kappa \\ \widetilde{p}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4} - 2i + 1\kappa \end{cases}$$

La figure 18 illustre les courbes de Bézier rationnelles pour tracer la lettre q de l'alphabet seule.

Il reste à modéliser l'attache finale composée :

- d'un quart de cercle γ_Q de rayon $\rho_Q = \frac{1}{4}$ de nombres complexes massiques de contrôle \widetilde{q}_0 , \widetilde{q}_1 et \widetilde{q}_2 ;
- d'un segment γ_R de nombres complexes massiques de contrôle \widetilde{r}_0 et \widetilde{r}_1 ;
- d'un quart de cercle γ_S de rayon $\rho_S = \frac{1}{4}$ de nombres complexes massiques de contrôle \widetilde{s}_0 , \widetilde{s}_1 et \widetilde{s}_2 .

avec les conditions suivantes :

- le point \widetilde{q}_0 est stationnaire ;
- la jointure entre γ_Q et γ_R est G^1-C^1 ;

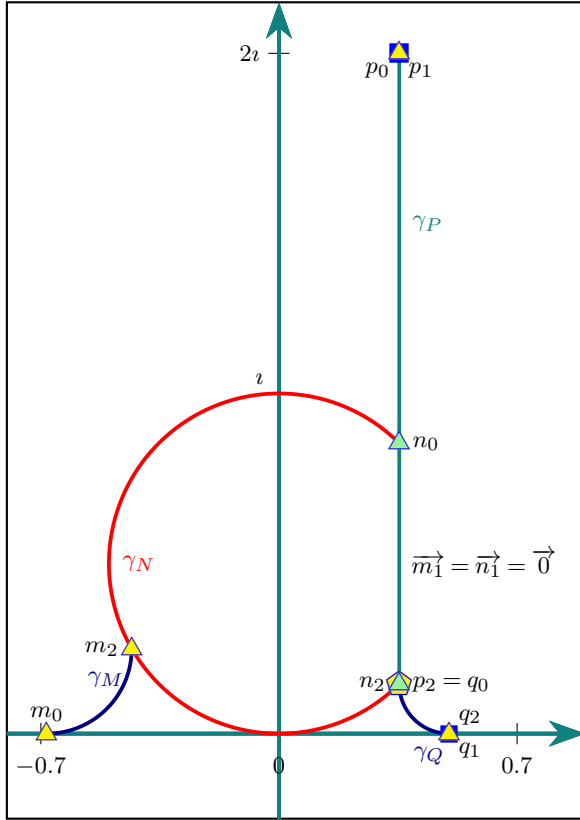


FIGURE 17 – Courbes de Bézier pour la cinématique du tracé de la lettre *d* de l'alphabet seule. Les points d'affixes n_2 et p_0 sont stationnaires alors que les mêmes, d'affixes p_1 (ce n'est pas un point de la courbe) d'une part et $p_2 = q_0$ d'autre part ne le sont pas.

- la jointure entre γ_R et γ_S est $G^1 - C^1$;
- si la lettre :
 - n'est pas en fin de mot, le vecteur vitesse en s_0 est unitaire ;
 - est en fin de mot, le point s_2 est stationnaire.

Concernant γ_Q , nous avons :

$$q_0 = q_1 = n_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2+\sqrt{2}}{4}i$$

et :

$$q_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{1+\sqrt{2}}{4}i$$

Concernant γ_R , nous avons $r_0 = r_2$ et :

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i$$

Concernant γ_S , nous avons $s_0 = p_1$ et $s_2 = \frac{3}{4}$ et s_1 dépend de la position de la lettre dans le mot.

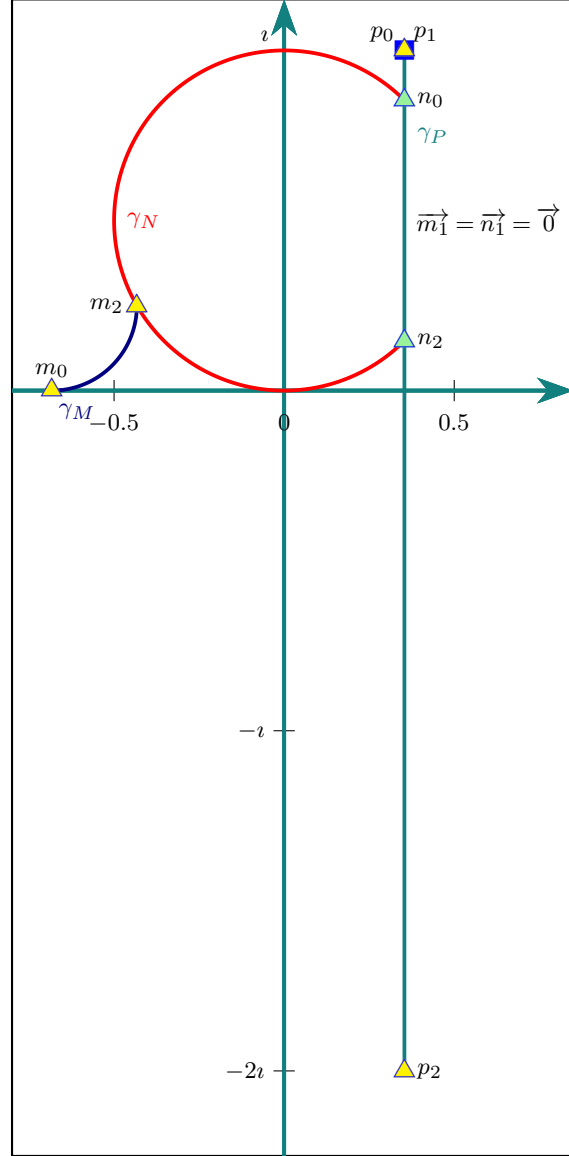


FIGURE 18 – Courbes de Bézier pour la cinématique du tracé de la lettre *q* de l'alphabet seule. Les points d'affixes n_2 et p_0 sont stationnaires alors que les mêmes, d'affixes p_1 (ce n'est pas un point de la courbe) d'une part et $p_2 = q_0$ d'autre part ne le sont pas.

6.3.1. La lettre n'est pas en fin de mot

6.3.1.1. La courbe γ_S Nous avons $s_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$ et γ_S est une courbe de Bézier rationnelle quadratique à poids réels, nous prenons comme poids $\iota_0 = \iota_2 = 1$ et $\iota_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nous avons :

$$\frac{d\gamma_S}{dt}(1) \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)$$

et effectuons le changement de paramètre homographique suivant :

$$h_S(u) = \frac{b_S u}{1 - u + b_S u}$$

qui laisse invariant l'intervalle $[0; 1]$ et permet de modifier le vecteur vitesse en 0 ou en 1. Nous avons :

$$h'_S(u) = \frac{1}{b_S}$$

et nous prenons :

$$b_S = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

et les nouveaux nombres complexes massiques de contrôle sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{s}_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\iota + \kappa \\ \tilde{s}_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \\ \quad + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\kappa \\ \tilde{s}_2 = \frac{3}{4} \\ \quad + \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\kappa \end{array} \right. \quad (30)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\frac{d\gamma_S}{dt}}(0) = \frac{-3+2\sqrt{2}}{4}\iota \\ \overrightarrow{\frac{d\gamma_S}{dt}}(1) = 1 \end{array} \right.$$

6.3.1.2. La courbe γ_R La courbe γ_R est une courbe de Bézier rationnelle de degré 1 (i.e. une « combinaison convexe pondérée ») de la forme :

$$z_R(t) = \frac{(1-t)r_0 + \xi_1 t r_1}{1-t + \xi_1 t}$$

d'où :

$$z'_R(t) = \frac{\xi_1(r_1 - r_0)}{(1-t + \xi_1 t)^2}$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_R(0) = \xi_1(r_1 - r_0) \\ z'_R(1) = \frac{r_1 - r_0}{\xi_1} \end{array} \right.$$

Comme nous avons :

$$\overrightarrow{\frac{d\gamma_S}{dt}}(0) = \frac{-3+2\sqrt{2}}{4}\iota$$

et :

$$r_1 - r_0 = \frac{1-2\sqrt{2}}{4}\iota$$

d'où

$$\frac{1-2\sqrt{2}}{4\xi_1} = \frac{-3+2\sqrt{2}}{4}$$

d'où

$$\xi_1 = 5 + 4\sqrt{2}$$

et les nombres complexes massiques de contrôle de γ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{1+\sqrt{2}}{4}\iota + \kappa \\ \tilde{r}_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\iota \\ \quad + (5+4\sqrt{2})\kappa \end{array} \right. \quad (31)$$

6.3.1.3. Les courbes γ_Q et γ_T Nous devons déterminer les poids α_1 de q_1 et α_2 de q_2 via le théorème 17. Nous avons :

$$d_2 = 2\sqrt{2}$$

et :

$$\alpha_1 = -\frac{\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})}{7}$$

et :

$$\alpha_2 = \rho_2 e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}\iota \\ b_0 = \frac{7}{8} \\ c_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d_0 = \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

et l'équation à résoudre est :

$$7x^2 + 4\sqrt{2}x + 1 = 0$$

et l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ -\frac{1+2\sqrt{2}}{7}; \frac{1-2\sqrt{2}}{7} \right\}$$

Nous prenons :

$$\rho_2 = -\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$$

d'où :

$$\alpha_2 = \frac{4+\sqrt{2}}{14}(1+\iota)$$

et :

$$\alpha_1 = -\sqrt{2}\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$$

avec $\gamma_Q(0) = q_0$ et $\gamma_Q(1) = q_2$ et $\overrightarrow{\frac{d\gamma_Q}{dt}}(0) = \vec{0}$ mais q_2 est un point double obtenu pour 1 et :

$$t_Q = \frac{15 - 2\sqrt{2}}{31} \simeq 0,393$$

et $\overrightarrow{\frac{d\gamma_Q}{dt}}(1)(i)$.

sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t}_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4}i + \kappa \\ \tilde{t}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4}i + \frac{128 - 52\sqrt{2}}{343}\kappa \\ \tilde{t}_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}(1 + i) + \frac{4064 - 2680\sqrt{2}}{16807}(1 + i)\kappa \end{array} \right. \quad (32)$$

Dans un premier temps, nous faisons le changement homographique :

$$h_Q(u) = t_Q u$$

qui envoie l'intervalle $[0; 1]$ sur $[0; t_Q]$. Nous avons $a_Q = 0$, $b_Q = t_Q$ et $c_Q = d_Q = 1$. Les nouveaux nombres complexes massiques de contrôle sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{l}_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4}i + \kappa \\ \tilde{l}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4}i + \frac{8 + \sqrt{2}}{31}\kappa \\ \tilde{l}_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}(1 + i) + \frac{116 - \sqrt{2}}{4}(1 + i)\kappa \end{array} \right.$$

mais nous avons :

$$\overrightarrow{\frac{d\gamma_L}{dt}}(1) \left(-\frac{15 + 2\sqrt{2}}{7}i \right)$$

et :

$$\overrightarrow{\frac{d\gamma_R}{dt}}(0) \left(-\frac{11 + 6\sqrt{2}}{4}i \right)$$

et nous devons faire un changement de paramètre homographique h_L qui envoie $[0; 1]$ sur $[0; 1]$ de la forme :

$$h_L(u) = \frac{b_L}{1 - u + b_L u}$$

ce qui donne :

$$h'_L(1) = \frac{1}{b_L}$$

d'où :

$$\begin{aligned} b_L &= \frac{-\frac{15 + 2\sqrt{2}}{7}i}{-\frac{11 + 6\sqrt{2}}{4}i} \\ &= \frac{564 - 272\sqrt{2}}{343} \end{aligned}$$

et les nombres complexes massiques finaux de contrôle

La figure 19 illustre les courbes de Bézier rationnelles pour tracer la première partie de l'attache finale de la lettre q qui n'est pas en fin de mot.

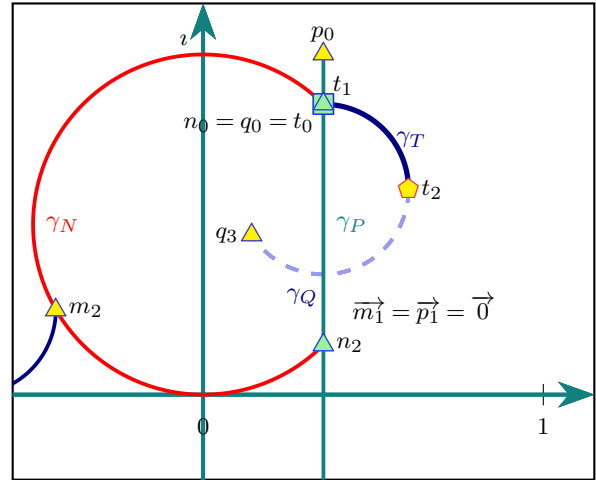


FIGURE 19 – Courbes de Bézier γ_Q et γ_T pour la cinématique du tracé de la lettre q. Les points d'affixes m_2 , n_2 et p_0 sont stationnaires alors que les points d'affixes p_1 et q_1 (ce ne sont pas des points de la courbe) ne le sont pas.

La figure 20 illustre les courbes de Bézier rationnelles pour tracer la lettre q qui est en début de mot et qui n'est pas en fin de mot.

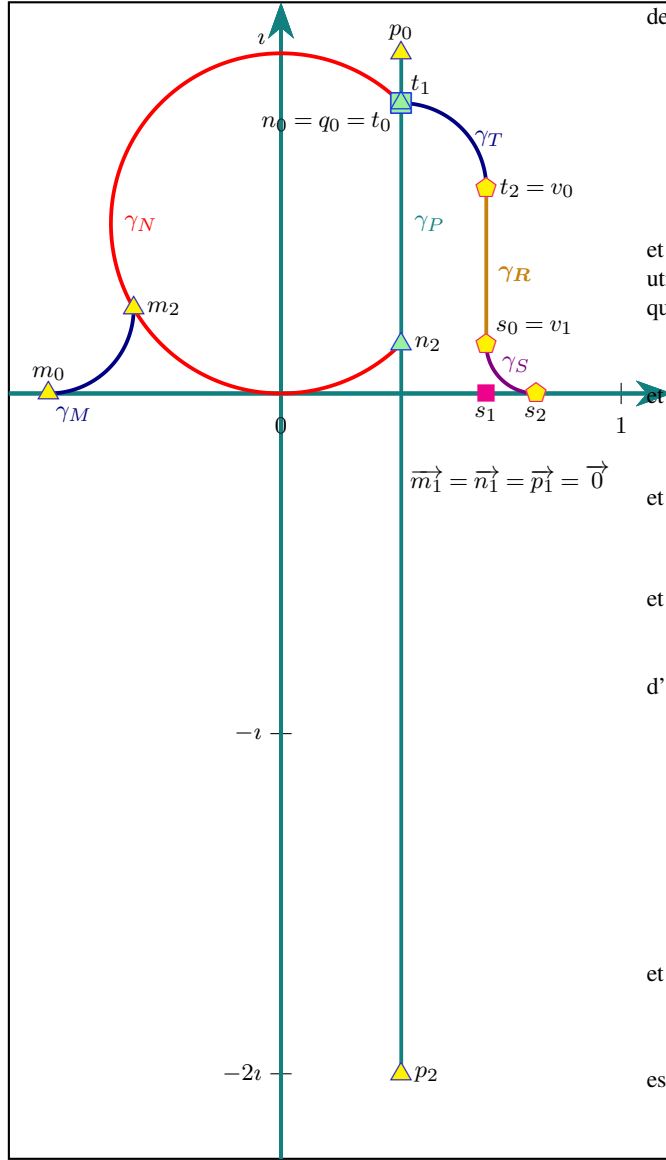


FIGURE 20 – Courbes de Bézier pour la cinématique du tracé de la lettre q. Les points d'affixes m_2 , n_2 et p_0 sont stationnaires alors que les points d'affixes p_1 et q_1 (ce ne sont pas des points de la courbe) ne le sont pas.

de contrôle, inspirés de la formule (30), sont :

$$\begin{cases} \tilde{s}_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + \alpha_0\kappa \\ \tilde{s}_1 = \frac{3}{4} + \alpha_1\kappa \\ \tilde{s}_2 = \frac{3}{4} + 1\kappa \end{cases}$$

et il reste à déterminer les poids α_0 et α_1 . Pour ce faire, nous utilisons le théorème (17) en changeant les rôles de z_0 et z_2 qui devient stationnaire. Nous avons :

$$d_2 = 2(1+\sqrt{2})$$

$$z_I = \frac{4+\sqrt{2}}{8} + \frac{2-\sqrt{2}}{8}i$$

$$U_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1-i)$$

$$\alpha_0 = \rho_0 e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

d'où :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i \\ b_0 = \frac{1+2\sqrt{2}}{4} \\ c_0 = \sqrt{2}-1 \\ d_0 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

et l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{4}x^2 + (\sqrt{2}-1)x + \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = 0$$

est :

$$S_s = \left\{ \frac{1-2\sqrt{2}}{7}; -3+\sqrt{2} \right\}$$

Nous prenons :

$$\rho_0 = -3+\sqrt{2}$$

d'où :

$$\alpha_0 = \rho_0 e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-4+3\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

et :

$$\alpha_1 = 1-\sqrt{2}$$

et les nombres complexes massiques de contrôle sont :

6.3.2. La lettre est en dernière position

Nous reprenons les courbes γ_T et γ_V du sous-paragraphe 6.3.1, les nombres complexes massiques de contrôle sont donnés par les formules (32) et (31). Les points

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{s}_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i \\ \quad + \frac{-4+3\sqrt{2}}{2}(1+i)\kappa \\ \tilde{s}_1 = \frac{3}{4} \\ \quad + (1-\sqrt{2})\kappa \\ \tilde{s}_2 = \frac{3}{4} \quad + 1\kappa \end{array} \right. \quad (33)$$

et la figure 21 illustre les courbes de Bézier rationnelles γ_R et γ_S .

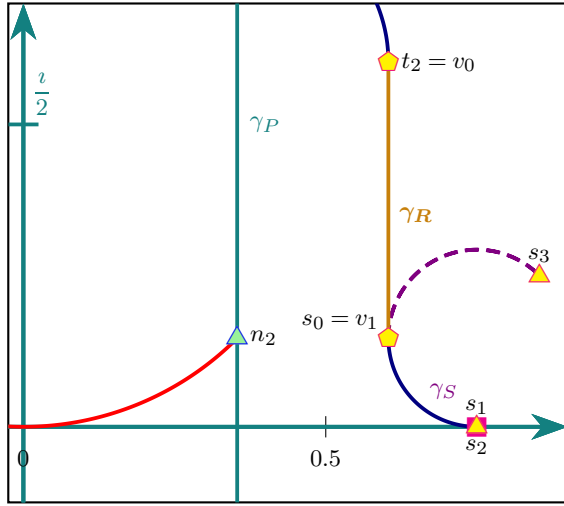


FIGURE 21 – Courbes de Bézier rationnelles γ_R et γ_S pour la cinématique du tracé de la lettre q en fin de mot.

La courbe admet un second point singulier d'affixe :

$$s_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4}i$$

et le point d'affixe s_0 est un point double obtenu pour $t = 0$ et :

$$t_S = \frac{6-2\sqrt{2}}{7} \simeq 0,453$$

et nous allons faire un changement de paramètre homographique h_S envoyant l'intervalle $[0; 1]$ sur $[t_S; 1]$ de la forme :

$$h_S(u) = \frac{c_S t_S (1-u) + u}{c_S (1-u) + u}$$

et nous allons déterminer c_S afin que la jointure entre γ_R et $\gamma_U = \gamma_S \circ h_S$ soit $G^1 - C_1$ i.e. :

$$\frac{\overrightarrow{d\gamma_U}}{dt}(t) = h'_S(u) \cdot \frac{\overrightarrow{d\gamma_S \circ h_S}}{dt}(u)$$

et le changement de paramètre homographique ne change

pas la nature d'un point stationnaire. Nous avons :

$$h'_S(u) = \frac{1}{(-1+2\sqrt{2})c_S}$$

d'un part et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overrightarrow{d\gamma_R}}{dt}(1) \left(\frac{-3+2\sqrt{2}}{4} \right) \\ \frac{\overrightarrow{d\gamma_U}}{dt}(0) \left(\frac{-1+2\sqrt{2}}{c_S} \right) \end{array} \right.$$

d'où :

$$c_T = 20 + 16\sqrt{2}$$

et :

$$a_T = 8(1+\sqrt{2})$$

et les nombres complexes massiques de contrôle sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i \\ \quad + 8(4+3\sqrt{2})(1+i)\kappa \\ \tilde{u}_1 = \frac{3}{4} \\ \quad + 4(1+\sqrt{2})\kappa \\ \tilde{s}_2 = \frac{3}{4} \quad + 1\kappa \end{array} \right. \quad (34)$$

et la figure 22 illustre les courbes de Bézier rationnelles pour tracer la lettre q qui est en début et en fin de mot.

6.4. La lettre c

Par rapport aux autres lettres, la courbe γ_P n'existe plus et le point $q_0 = n_2$ est stationnaire. Il reste à distinguer les cas où la lettre est en fin de mot ou non.

6.4.1. La lettre n'est pas en fin de mot

Le point initial est stationnaire et le vecteur vitesse à la seconde extrémité est de norme 1. Nous reprenons la méthode utilisée dans le paragraphe 6.1.4.1. Nous commençons à utiliser le théorème 17 avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + \kappa \\ \tilde{q}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + \alpha_1 \kappa \\ \tilde{q}_2 = \frac{1}{2} + \alpha_2 \kappa \end{array} \right.$$

Le cercle à pour centre Ω_3 d'affixe :

$$z_3 = \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i$$

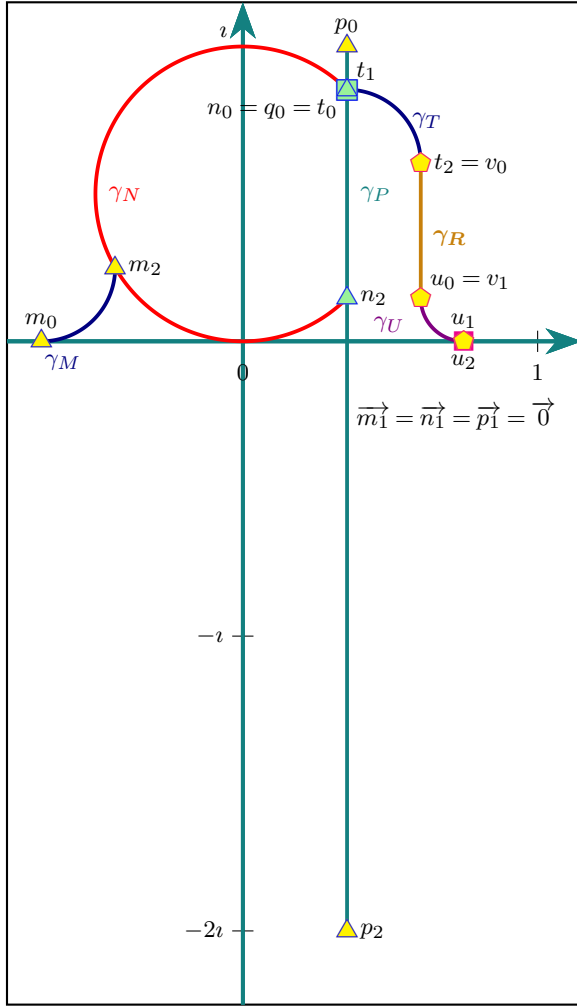


FIGURE 22 – Courbes de Bézier pour la cinématique du tracé de la lettre q. Les points d'afixes m_2 , n_2 , p_0 et w_2 sont stationnaires alors que les points d'afixes p_1 et q_1 (ce ne sont pas des points de la courbe) ne le sont pas._____

et de rayon $\rho_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Nous avons alors :

$$\arg(\alpha_2) = \frac{3\pi}{4}$$

et $\alpha_2 = \rho_2 e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Nous avons :

$$d_2 = 2(\sqrt{2}+1)$$

et :

$$\alpha_1 = \rho_2(\sqrt{2}+1)$$

Nous avons :

$$U_1 = \frac{\sqrt{2}-2}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i$$

et :

$$z_I = \frac{2+\sqrt{2}}{8} + \frac{2-\sqrt{2}}{8}i$$

Nous avons :

$$\begin{cases} a_0 &= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{2}-1}{4}i \\ b_0 &= \frac{2\sqrt{2}+1}{4} \\ c_0 &= \sqrt{2}-1 \\ d_0 &= \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

et l'équation :

$$\frac{2\sqrt{2}+1}{4}x^2 + (\sqrt{2}-1)x + \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = 0$$

admet comme ensemble de solution :

$$S = \left\{ \frac{1-2\sqrt{2}}{7}; -3+2\sqrt{2} \right\}$$

Nous choisissons :

$$\rho_2 = \frac{1-2\sqrt{2}}{7}$$

d'où :

$$\alpha_1 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{7}$$

et :

$$\alpha_2 = \frac{4-\sqrt{2}}{14} - \frac{4-\sqrt{2}}{14}i$$

Nous avons :

$$\gamma_Q\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4}i\right)$$

et le second points de stationnaire est :

$$q_3\left(\frac{11-\sqrt{2}}{20} - \frac{3+2\sqrt{2}}{20}i\right)$$

et la figure 23 montre tous les éléments de la courbe γ_Q .

L'image du complexe q_2 est un point double obtenu pour les valeurs de paramètres 1 et $t_1 = \frac{13-2\sqrt{2}}{23} \simeq 0,442$.

Nous allons effectuer un changement de paramètre homographique envoyant $[0; 1]$ sur $[0; t_3]$ via la fonction :

$$h_3 : u \mapsto t_3 u$$

d'où $a_3 = 0$, $b_3 = t_3$ et $c_3 = d_3 = 1$. Les nouveaux nombres complexes massiques de contrôle de la courbe γ_R sont :

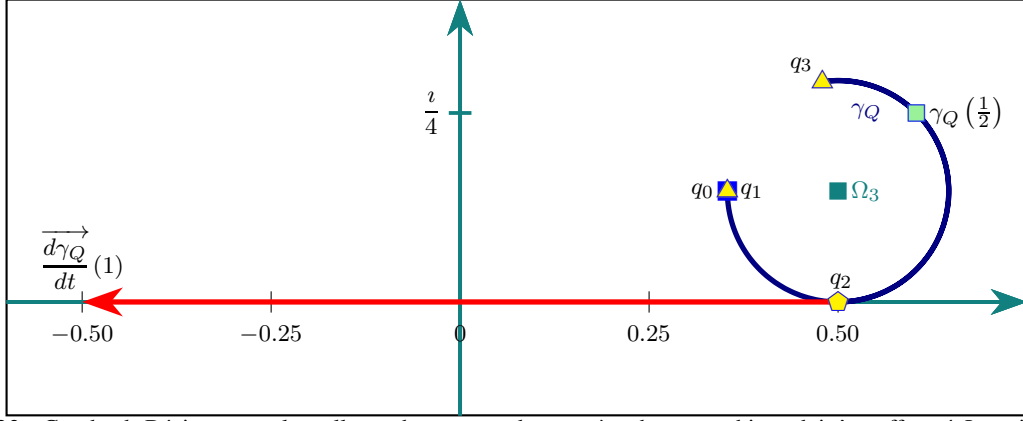


FIGURE 23 – Courbe de Bézier γ_Q sur laquelle un changement de paramètre homographique doit être effectué. Le point d'affixe q_0 est stationnaire alors que le même, d'affixe q_1 ne l'est pas, ce n'est pas un point de la courbe.

$$\begin{cases} \tilde{r}_0 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + \kappa \\ \tilde{r}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + \frac{5+\sqrt{2}}{23}\kappa \\ \tilde{r}_2 &= \frac{1}{2} + \frac{116-55\sqrt{2}}{1058}(1-i)\kappa \end{cases}$$

mais nous obtenons :

$$\frac{d\gamma_R}{dt}(1) \left(\frac{13+2\sqrt{2}}{7} \right)$$

et :

$$\left\| \frac{d\gamma_R}{dt}(1) \right\| \simeq 2,261$$

Pour obtenir un vecteur vitesse unitaire, nous effectuons un nouveau changement de paramètre homographique h_4 laissant invariant l'intervalle $[0;1]$ d'où $a_4 = 0$, $c_4 = 1$ et $d_4 = b_4$. Ainsi :

$$h_4 : u \mapsto \frac{b_4 u}{1 - u + b_4 u}$$

et :

$$h'_4(1) = \frac{1}{b_4}$$

L'affixe du vecteur vitesse en 1 est :

$$\frac{13+2\sqrt{2}}{7}$$

d'où :

$$b_4 = \frac{13+2\sqrt{2}}{7} \simeq 2,261$$

et les nombres complexes massiques de contrôle de la courbe γ_S sont :

$$\begin{cases} \tilde{s}_0 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + \kappa \\ \tilde{s}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + \frac{3+\sqrt{2}}{7}\kappa \\ \tilde{s}_2 &= \frac{1}{2} + \frac{4-\sqrt{2}}{14}(1-i)\kappa \end{cases}$$

et la figure 24 montre tous les éléments de la courbe γ_Q .

La figure 25 illustre les courbes de Bézier rationnelles pour tracer la lettre α de l'alphabet seule.

6.4.2. La lettre est en fin de mot

Le nombre complexe massique $\tilde{q}_2 = \frac{1}{2} + \omega_2 \kappa$ est stationnaire. Nous avons donc :

$$\begin{cases} \tilde{q}_0 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}i + 1\kappa \\ \tilde{q}_1 &= 0 + 0\kappa \\ \tilde{q}_2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\kappa \end{cases}$$

et :

$$\left| \gamma_Q\left(\frac{1}{2}\right) - q_0 \right| = \left| \gamma_Q\left(\frac{1}{2}\right) - q_2 \right| = \frac{10-7\sqrt{2}}{8}$$

7. Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons introduits les courbes de Bézier rationnelles quadratiques planes à poids complexes. Nous avons alors adapté l'algorithme de De Casteljau afin de subdiviser une courbe de Bézier sous forme standard en deux courbes de Bézier sous forme standard. Nous avons modélisé des arcs de cercles avec un ou deux points extrémaux et avons appliqué les résultats à la cinématique de l'écriture des lettres cursives α , c , d et q .

Dans un futur proche, nous comptons continuer l'étude

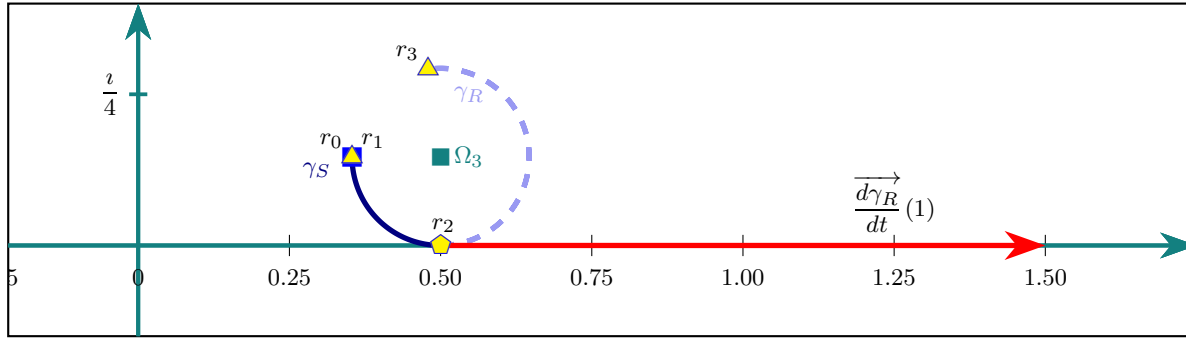


FIGURE 24 – Courbe de Bézier γ_S avec le premier point stationnaire et ayant en dernier point un vecteur vitesse unitaire. Le point d'abscisse r_0 est stationnaire alors que le même, d'abscisse r_1 ne l'est pas, ce n'est pas un point de la courbe.

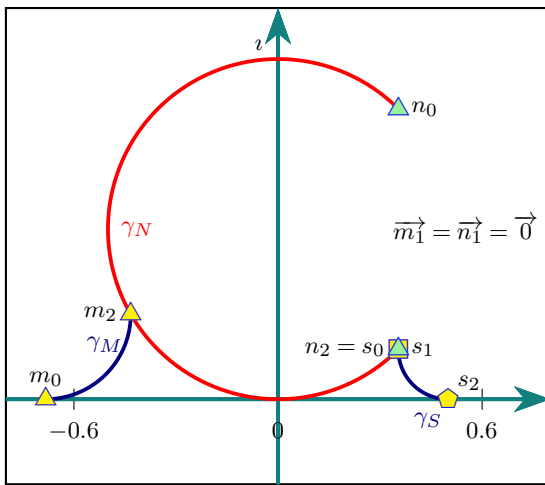


FIGURE 25 – Courbes de Bézier pour la cinématique du tracé de la lettre c en début de mot. Les points d'abscisses n_2 et s_0 sont stationnaires alors que le point d'abscisse s_1 (ce n'est pas un point de la courbe) ne l'est pas.

des courbes de Bézier rationnelles quadratiques à nombres complexes massiques de contrôle en étudiant les points double, d'inflexion et de rebroussement. Nous comptons caractériser les courbes de Bézier rationnelles cubiques et quartiques pouvant s'écrire sous la forme de courbes de Bézier rationnelles quadratiques à poids complexes.

Références

- [Béc97] BÉCAR J. P. : *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [Béz86] BÉZIER P. : *Courbe et surface*, 2ème ed., vol. 4. Hermès, Paris, Octobre 1986.
- [BFG21] BÉCAR J. P., FUCHS L., GARNIER L. : Inversion et courbes de Bézier rationnelles à poids complexes. In *GTMG 2021* (Palaiseau, France, Mars 2021).

- [BG14] BÉCAR J. P., GARNIER L. : Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. In *G.T.M.G. 2014* (Lyon, 26 au 27 mars 2014).
- [Cas85] CASTELJAU P. D. : *Mathématiques et CAO. Volume 2 : formes à pôles*. Hermès, 1985.
- [DLG13] DRUOTON L., LANGEVIN R., GARNIER L. : Blending canal surfaces along given circles using Dupin cyclides. *International Journal of Computer Mathematics* (2013), 1–20.
- [Far92] FARIN G. : From conics to nurbs : A tutorial and survey. *IEEE Comput. Graph. Appl.* Vol. 12, Num. 5 (septembre 1992), 78–86.
- [Far99] FARIN G. : *NURBS from Projective Geometry to Practical Use*, 2 ed. A K Peters, Ltd, 1999. ISBN 1-56881-084-9.
- [FJ89] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes et surfaces rationnelles*, vol. RMA 12. Masson, 1989.
- [FJ92] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes splines rationnelles, applications à la CAO*, vol. RMA 24. Masson, 1992.
- [GB16] GARNIER L., BÉCAR J.-P. : Mass points, Bézier curves and conics : a survey. In *Eleventh International Workshop on Automated Deduction in Geometry* (Strasbourg, France, juin 2016), Proceedings of ADG 2016, pp. 97–116. <http://ufrsciencestech.u-bourgogne.fr/~garnier/publications/adg2016/>.
- [GB17a] GARNIER L., BÉCAR J. : Courbes de Bézier quadratiques et nombres complexes massiques. In *GTMG 2017* (ENS Paris-Saclay, Cachan, France, Mars 2017).
- [GB17b] GARNIER L., BÉCAR J. P. : *Nouveaux modèles géométriques pour la C.A.O. et la synthèse d'images : courbes de Bézier, points massiques et surfaces canal*. Editions Universitaires Européennes, Saarbrücken, 2017. ISBN 978-3-639-54676-7.
- [GBD17] GARNIER L., BÉCAR J.-P., DRUOTON L. : Canal surfaces as Bézier curves using mass points. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 54 (2017), 15–34.

- [GBD*19] GARNIER L., BÉCAR J., DRUOTON L., FUCHS L., MORIN G. : Theory of Minkowski-Lorentz spaces. In *Encyclopedia of Computer Graphics and Games*, Lee N., (Ed.). Springer, 2019.
- [GBD*20] GARNIER L., BÉCAR J. P., DRUOTON L., FUCHS L., MORIN G. : *Minkowski-Lorentz Spaces Applications : Resolution of Apollonius and Dupin Problems*. Springer International Publishing, Cham, 2020, pp. 1–10.
- [GBF23] GARNIER L., BÉCAR J., FUCHS L. : Jointure G^2 de deux courbes par une courbe de bézier rationnelle à points massiques de contrôle. In *GTMG 2023* (Strasbourg, France, 2023).
- [GBMF15] GARNIER L., BÉCAR J. P., MORIN G., FUCHS L. : Une application de l'espace des sphères : détermination des sphères de Dandelin. AFIG, (Ed.), Université de Lyon, LIRIS. http://liris.cnrs.fr/afig2015/?page_id=939#sthash.IbJxJhLu.dpuf.
- [GDB*21a] GARNIER L., DRUOTON L., BÉCAR J., FUCHS L., MORIN G. : Subdivisions of Horned or Spindle Dupin Cyclides Using Bézier Curves with Mass Points. *WSEAS TRANSACTIONS ON MATHEMATICS*. Vol. 20 (12 2021), 756–776.
- [GDB*21b] GARNIER L., DRUOTON L., BÉCAR J., FUCHS L., MORIN G. : Subdivisions of Ring Dupin Cyclides Using Bézier Curves with Mass Points. *WSEAS TRANSACTIONS ON MATHEMATICS*. Vol. 20 (11 2021), 581–596.
- [GFB22] GARNIER L., FUCHS L., BÉCAR J. : Courbes de Bézier, cinématique et ode au vecteur \vec{O} de contrôle. In *GTMG 2022* (Dijon, France, 2022).
- [Gou83] GOURION M. : *Mathématiques, Terminales C et E, tome 2*. Fernand Nathan, 1983.
- [Lad02] LADEGAILLERIE Y. : *Géométrie pour le CAPES de Mathématiques*. Ellipses, Paris, 2002. ISBN 2-7298-1148-6.
- [Lad03] LADEGAILLERIE Y. : *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, Paris, 2003. ISBN 2-7298-1416-7.
- [LSD*14] LANGEVIN R., SIFRE J.-C., DRUOTON L., GARNIER L., PALUSZNY M. : Finding a cyclide given three contact conditions. *Computational and Applied Mathematics* (2014), 1–18.
- [PT89] PIEGL L., TILLES W. : A managerie of rational b-spline circles. *IEEE Computer Graphics and Applications*. Vol. 9, Num. 5 (1989), 46–56.
- [PT95] PIEGL L., TILLER W. : *The NURBS book*. Monographs in visual communication. Springer, 1995.
- [SR09] SÁNCHEZ-REYES J. : Complex rational Bézier curves. *Comput. Aided Geom. Des.*. Vol. 26, Num. 8 (nov 2009), 865–876.